

# Algebra4 matematikus szakirány

7. gyakorlat

2023. április 21.

1. A következő számok közül melyek algebrai egészek?  $\sqrt{5}/\sqrt{2}$ ,  $(1 + \sqrt{3})/2$ ,  $(\sqrt{3} + \sqrt{7})/2$ ,  $\frac{3+2\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}$ ,  $(1 + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100})/3$ ,  $2 \cos(2\pi/19)$ .
2. (beadandó HF) Igazoljuk, hogy ha  $\alpha^n$  algebrai egész valamely  $\alpha \in \mathbb{C}$ -re és  $n \geq 1$  egészre, akkor  $\alpha$  is algebrai egész.
3. Mutassuk meg, hogy  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  nem egészre zárt.
4. Határozzuk meg az algebrai egészeket a  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  testben, ha  $d \in \mathbb{Z}$  négyzetmentes.
5. Legyen  $\mathcal{O}$  a  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  testben az egészek gyűrűje ( $d \in \mathbb{Z}$  négyzetmentes) és  $p \nmid 2d$  egy prím. Igazoljuk, hogy  $p$  pontosan akkor prímtulajdonságú  $\mathcal{O}$ -ban, ha  $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$ . Mi a helyzet, ha  $p \mid d$ ? És ha  $p = 2$ ?
6. Legyen  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$  egy harmadfokú normált polinom, aminek nincs többszörös gyöke. Igazoljuk, hogy a  $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - f(x))$  gyűrű egészre zárt. Ez egy nehéz feladat, némi segítség:
  - (a) Legyen  $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - f(x))$  és  $K$  a hányadostest. Vegyünk egy  $\frac{a}{b} \in K$  elemet ( $a, b \in R$ ,  $b \neq 0$ ) és legyen  $I = \{r \in R \mid r \frac{a}{b} \in R\}$ . Mutassuk meg, hogy  $I \triangleleft R$  és  $I = R \iff \frac{a}{b} \in R$ .
  - (b) Ha  $I \neq R$ , akkor benne van egy maximális ideálban. Ez a maximális ideál egy  $P = (u, v)$  ponthoz kötött, és  $P$  rajta van az  $y^2 = f(x)$  egyenletű  $E$  (elliptikus) görbén (azaz  $v^2 = f(u)$ ).
  - (c) A feltétel, hogy  $f$ -nek nincs többszörös gyöke azzal ekvivalens, hogy  $E$  minden pontja *sima*, azaz  $P \in E$  esetén a  $(\frac{\partial(y^2-f(x))}{\partial x}(P), \frac{\partial(y^2-f(x))}{\partial y}(P))$  érintővektor nem a nullvektor.
  - (d) Mutassuk meg, hogy az, hogy „hánszoros gyöke/pólusa van”  $\frac{a}{b}$ -nek a  $P$  pontban jóldefiniált, ha  $P$  egy sima pont a görbén. Ha  $\frac{a}{b}$  gyöke egy  $R$ -beli együtthatós normált polinomnak, akkor jussunk ellentmondásra a racionális gyökteszthez hasonlóan.
7. Igazoljuk, hogy a  $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$  gyűrű nem egészre zárt.
8. Legyen  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  egy irreducibilis normált polinom. Tegyük fel, hogy  $f$   $\mathbb{Q}$  feletti felbontási testének Galois-csoportja Abel és  $f(\alpha) = 0$  valamilyen  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| = 1$  számra. Igazoljuk, hogy  $f$  összes többi (komplex) gyöke is 1 abszolútértékű.
- 9\* Igazoljuk, hogy ha  $\alpha$  egy olyan algebrai egész szám, melynek az összes Galois-konjugáltja 1 abszolútértékű, akkor  $\alpha$  egységgyök.
- 10\* Határozzuk meg az algebrai egészeket a  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  testben.
- 11\* Ebben a feladatban azt igazoljuk, hogy ha  $R$  egy egészre zárt gyűrű, akkor  $R[x]$  is az.
  - (a) Először vezessük vissza a feladatot arra, hogy  $R[x]$  egészre zárt  $K[x]$ -ben. ( $K[x]$  benne van  $R[x]$  hányadostestében és egészre zárt, hiszen főideálgyűrű.)
  - (b) Igazoljuk, hogy ha  $f, g \in K[x]$  normált polinomok, melyekre  $fg \in R[x]$ , akkor  $f$  és  $g$  is  $R[x]$ -ben van. (Segítség: bontsuk mindkét polinomot gyöktényezőik szorzatára egy bővebb testben.)

- (c) Ha egy  $f \in K[x]$  gyöke egy  $R[x]$  feletti  $k$  fokú normált polinomnak, akkor  $f + x^N$  is gyöke egy ugyancsak  $k$  fokú normált polinomnak. Növeljük  $N$ -et és a normált polinom (melynek  $f + x^N$  gyöke) konstans tagja felírható két normált polinom szorzataként, melyek közül az egyik épp  $f + x^N$ .