Algebra4 matematikus szakirány

6. gyakorlat

2023. április 14.

1. (beadandó HF) Legyen $\varepsilon = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ$ kilencedik primitív egységgyök. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ valós elemei egy L résztestet alkotnak, ami $\mathbb{Q}$-nak harmadfokú bővítése. Igazoljuk azt is, hogy L az $x^3 - 3x + 1$ polinom felbontási teste, és hogy ennek a polinomnak a gyökei $2\cos 40^\circ$, $2\cos 80^\circ$, $2\cos 160^\circ$. Írjuk föl $\cos 40^\circ$-ot (erős) gyökkifejezésként.

2. Legyen K egy 0 karakterisztikájú test, $\alpha \in K$ és p prím. Igazoljuk, hogy $x^p - \alpha$ vagy irreducibilis K fölött vagy van gyöke K-ban. Sőt, ha legalább két különböző gyöke van K-ban, akkor gyöktényezők szorzatára bomlik K fölött.

3. Legyen $\varepsilon \in K$ egy primitív n-edik egységgyök és $\mathrm{char}(K) = 0$ (valójában elég, ha $\mathrm{char}(K) \nmid n$). Tegyük fel, hogy $K \le L$ egy Galois-bővítés, melynek Galois csoportja $\mathrm{Gal}(L/K) \cong C_n$ n-edrendű ciklikus csoport és σ az egyik generátorelem. Ha $\gamma \in L$, akkor legyen

$$\beta = \beta(\gamma, \varepsilon) := \gamma + \varepsilon\sigma(\gamma) + \cdots + \varepsilon^{n-1}\sigma^{n-1}(\gamma)\ .$$

   Igazoljuk, hogy ekkor $\sigma(\beta) = \varepsilon^{-1}\beta$. Az 5. feladat segítségével mutassuk meg, hogy $\gamma \in L$ választható úgy, hogy $\beta \neq 0$ legyen. Ez új bizonyítást Kummer tételére, miszerint $L = K(\sqrt[n]{b})$ alkalmas $b \in K$ elemmel.

4. Ha $n = p$ prím, akkor mutassuk meg közvetlenül, hogy γ és ε választható az előző feladatban úgy, hogy $\beta \neq 0$. (Segítség: számítsuk ki a $\sum_{j=0}^{p-1} \beta(\gamma, \varepsilon^j)$ összeget.)

5.* Legyen L/K egy Galois-bővítés. Ebben és a következő a feladatban azt látjuk be, hogy van olyan $\gamma \in L$, melyre $\{\sigma(\gamma) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)\}$ lineárisan független K felett, azaz L egy bázisát alkotja. Az ilyen bázist normál bázisnak nevezzük. Ebben a feladatban feltesszük, hogy K végtelen.

   (*a*) Legyen $f(x) \in K[x]$ szeparábilis, normált polinom, mely L fölött $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ gyöktényezők szorzatára bomlik. Legyen $g_i(x) := \frac{f(x)}{f'(\alpha_i)(x-\alpha_i)} \in L[x]$. Igazoljuk, hogy (*i*) $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$ („parciális törtekre bontása $1/f(x)$-nek”), és
   (*ii*) $g_i(x)g_j(x) \equiv \begin{cases} 0 \mod (f(x)) & \text{ha } i \neq j \\ g_i(x) \mod (f(x)) & \text{ha } i = j\ . \end{cases}$

   (*b*) Legyen L/K Galois-bővítés, mint fent, és α olyan, melyre $L = K(\alpha)$, f pedig α minimálpolinomja. Legyen $\mathrm{Gal}(L/K) = \{\mathrm{id} = \sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ és $\alpha_i = \sigma_i(\alpha) \in L$. Képzzük az $A \in L[x]^{n\times n}$ mátrixot a következőképpen: legyen az i-edik sor j-edik eleme $\sigma_i(\sigma_j(g_1(x))) \in L[x]$. Mutassuk meg (az (*a*) rész segítségével), hogy $A^T A \equiv I \mod (f(x))$ (itt I az egységmátrix).

   (*c*) Tegyük fel, hogy K végtelen. A (*b*) részt felhasználva igazoljuk, hogy van olyan $\beta \in K$, melyre $\det(A(\beta)) = \det(\sigma_i\sigma_j(g_1(\beta)))_{i,j} \neq 0$. Speciálisan a $\gamma = g_1(\beta)$ választással a $\{\sigma_1(\gamma), \ldots, \sigma_n(\gamma)\}$ egy bázisa F-nek, mint K feletti vektortérnek.

6.* Legyen most $K = \mathbb{F}_q$ egy véges test és legyen $|L/K| = n$ a fokszám.

   (*a*) Mutassuk meg, hogy a $\mathrm{Frob}_q\colon L \to L$ K-lineáris leképezés minimálpolinomja $x^n - 1$. Segítség: Frob_q gyöke az $x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$ polinomnak $\iff$ $\mathrm{Frob}_q^k + a_1\mathrm{Frob}_q^{k-1} + \cdots + a_0\mathrm{id}$ az azonosan 0 leképezés $\iff$ minden $\alpha \in L$-re $\alpha^{q^k} + a_1\alpha^{q^{k-1}} + \cdots + a_0\alpha = 0$.

(b) Tegyük L-et $K[x]$-modulussá úgy, hogy az x-szel való szorzás a Frob_q lineáris leképezés. A főideálgyűrűk feletti végesen generált modulusok alaptételének alkalmazásával (vagy másképp) igazoljuk, hogy ekkor $L \cong K[x]/(x^n - 1)$, tehát ennél az azonosításnál a $\gamma := 1 + (x^n - 1)$ jó választás.

7. Legyen K egy 0 karakterisztikájú test, $f \in K[x]$ egy negyedfokú irreducibilis polinom, melynek harmadfokú rezolvense g. Jelölje G az f felbontási testének Galois-csoportját. Igazoljuk az alábbi állításokat:

   (1) Ha g irreducibilis K fölött, akkor $G \cong A_4$ vagy $G \cong S_4$ aszerint, hogy f diszkriminánsa négyzetelem-e K-ban.

   (2) Ha g elsőfokú tényezőkre bomlik K fölött, akkor G a Klein csoport és f diszkriminánsa négyzetelem K-ban.

   (3) Ha g egy első- és egy másodfokú irreducibilis polinom szorzatára bomlik K fölött, akkor $G \cong D_4$ vagy $G \cong C_4$. Ekkor f diszkriminánsa *nem* négyzetelem K-ban.

8. Legyen $f(x) = x^4 + bx^2 + d \in K[x]$ irreducibilis, ahol $\mathrm{char}(K) = 0$ és G az f felbontási testének Galois-csoportja. Mutassuk meg, hogy

   (1) Ha d négyzetelem K-ban, akkor G a Klein csoport.

   (2) Ha d *nem* négyzetelem K-ban, akkor $G \cong C_4$ vagy $G \cong D_4$ aszerint, hogy $d(b^2 - 4d)$ négyzetelem-e K-ban vagy sem.

9. Legyen $f(x) = x^4 + bx^2 + cx + d \in K[x]$ irreducibilis, ahol $\mathrm{char}(K) = 0$ és G az f felbontási testének Galois-csoportja. Tegyük fel, hogy az f polinom g harmadfokú rezolvensének egyetlen gyöke u az egyetlen gyöke K-ban. Mutassuk meg, hogy ekkor $G \cong C_4$, ha $(2u - b)(2u + b)^2 - 4c^2$ négyzetelem K-ban, egyébként pedig $G \cong D_4$.

10.* Legyen K egy test, és $L = K(y_1, \ldots, y_n)$ az n-változós K feletti racionális törtfüggvények teste. Igazoljuk, hogy az $x^n + y_1 x^{n-1} + \cdots + y_n \in L[x]$ polinom irreducibilis, és a felbontási testének a Galois-csoportja S_n. Tehát az általános n-edfokú egyenletre nincsen gyökképlet, ha $n \geq 5$.

11.* Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ egy irreducibilis normált polinom. Tegyük fel, hogy f $\mathbb{Q}$ feletti felbontási testének Galois-csoportja Abel és $f(\alpha) = 0$ valamilyen $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ számra. Igazoljuk, hogy f összes többi (komplex) gyöke is 1 abszolútértékű.