Algebra4 matematikus szakirány

5. gyakorlat

2023. március 31.

1. Az alábbi szerkesztési feladatok mindegyikében határozzuk meg az F_0 alaptestet, a szerkesztendő szám által generált bővítés fokát K fölött, és döntsük el, hogy a szerkesztés elvégezhető-e.

   (a) Adott az egységszakasz, szerkesztendő $\sqrt[5]{2}$.

   (b) Adott az egységszakasz, szerkesztendő $\sqrt[4]{2}$.

   (c) Adott az egységszakasz és egy $\sqrt[3]{2}$ hosszú szakasz, szerkesztendő $\sqrt[6]{2}$.

   (d) Adott az egységszakasz és egy $\sqrt[3]{2}$ hosszú szakasz, szerkesztendő $\sqrt[5]{2}$.

   (e) Adott $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,\pi)$, az egységsugarú kört kell négyszögesíteni.

   (f) Adott egy szabályos 9-szög és szerkesztendő egy szabályos 18-szög.

2. Mely n egész számokra szerkeszthető n fokos szög?

3. Határozzuk meg $\cos(\frac{2\pi}{n})$ fokát $\mathbb{Q}$ fölött.

4. Fejezzük ki az $\varepsilon_5 = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$ primitív ötödik és $(*)$ az $\varepsilon_{17} = \cos(2\pi/17) + i\sin(2\pi/17)$ primitív tizenhetedik egységgyököt négyzetgyök-vonások segítségével. (Segítség: emlékezzünk, hogy $\sqrt{5}$-öt ki tudjuk fejezni ε_5 polinomjaként, a $\sqrt{17}$-et pedig ε_{17} polinomjaként.)

5. Igazoljuk, hogy ha egy irreducibilis polinom egyik gyöke gyökkifejezés, akkor az összes többi is az.

6. Igazoljuk, hogy az $x^n - a \in K[x]$ polinom felbontási testének Galois-csoportja mindig feloldható (függetlenül K karakterisztikájától, és attól, hogy milyen egységgyökök vannak K-ban.

7. (beadandó HF, $3+4+3$ pont, azaz a (c)-t nem muszáj beadni, Artin–Schreier) Legyen K egy p karakterisztikájú test, és L egy p-edfokú Galois-bővítése. Jelöljük σ-val a $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ p-edrendű ciklikus csoport egy generátorelemét.

   (a) Mutassuk meg, hogy $\sigma - \mathrm{id}\colon L \to L$ lineáris leképezés magja K, azaz 1-dimenziós.

   (b) Mutassuk meg, hogy $\sigma\colon L \to L$ – mint K-lineáris leképezés a p-dimenziós L vektortéren – minimálpolinomja $x^p - 1 = (x-1)^p$. Továbbá $\sigma - \mathrm{id}$ képtere tartalmazza K-t.

   (c) Igazoljuk, hogy ha $\sigma(\alpha) - \alpha = 1$ valamely $\alpha \in L$-re, akkor α minimálpolinomja $x^p - x - a$ alakú valamilyen $a \in K$-ra. Mutassuk meg, hogy mindig van ilyen $\alpha \in L$, speciálisan $L \cong K[x]/(x^p - x - a)$ alkalmas $a \in K$-val.

8.* Legyen K egy p-karakterisztikájú test (p prím). Az $f(x) \in K[x]$ polinomot *additív*nak nevezzük, ha az $f(x+y) = f(x) + f(y)$ azonosság teljesül. Igazoljuk, hogy az additív polinomok éppen az $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{p^i}$ alakú polinomok.

9.* Igazoljuk, hogy ha f egy additív polinom, akkor az f gyökei $\overline{K}$-ban részcsoportot alkotnak az összeadásra nézve.

10.* Igazoljuk, hogy a $K[x]$-beli additív polinomok gyűrűt alkotnak a *kompozícióra* nézve. Mi lesz a gyűrű egységeleme? Mely K testek esetén kommutatív ez a gyűrű?

11.* Igazoljuk, hogy az additív polinomok gyűrűje izomorf a $K[\varphi] = \{a_0 + a_1\varphi + \cdots + a_n\varphi^n \mid a_i \in K, i = 0, 1, \ldots, n\}$ ferde polinomgyűrűvel, ahol φ és K elemei nem felcserélhetők, hanem $\varphi \cdot a = \mathrm{Frob}_p(a)\varphi$ minden $a \in K$-ra. (Segítség: φ-nek az x^p additív polinom fog megfelelni.)