Algebra4 matematikus szakirány

1. gyakorlat

2023. március 3.

1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$.
2. Határozzuk meg $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ felett. Mik lesznek $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ résztestei?
3. A $\pi+3, 5\pi+6, \pi+\sqrt{2}, \pi^2+2\pi+2, \sqrt{\pi}$ számok közül melyek algebraiak? (Használjuk fel, hogy π transzcendens.)
4. Legyen $L = K(\alpha, \beta)$, ahol $|K(\alpha) : K| = m$, $|K(\beta) : K| = n$ és $(m, n) = 1$. Igazoljuk, hogy $|K(\alpha, \beta) : K| = mn$. Elhagyható-e az a feltétel, hogy $(m, n) = 1$?
5. (beadandó HF) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy $a+bi$ pontosan akkor algebrai, ha a és b mindkettő algebrai.
6. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ egyetlen véges bővítése sem algebrailag zárt.
7. Legyen $K \leq L$ egy testbővítés, és $\alpha, \beta \in L$ transzcendens elemek K felett. Igazoljuk, hogy α pontosan akkor algebrai $K(\beta)$ felett, ha β algebrai $K(\alpha)$ felett.
8.** Legyen $K(x)$ a racionális törtfüggvények teste (azaz $K[x]$ hányadosteste) a K test felett. Igazoljuk, hogy minden $K < L < K(x)$ valódi közbülső testre létezik olyan $g(x) \in K(x)$ racionális törtfüggvény, melyre $L = K(g(x))$.
9. Legyen R egy integritási tartomány, és K egy olyan részgyűrűje R-nek, ami test, és $\dim_K R < \infty$. Igazoljuk, hogy R test.
10. Legyen α páratlan fokú elem egy K test felett. Igazoljuk, hogy $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.
11.* Legyen α algebrai K felett. Igazoljuk, hogy $K(\alpha)$-nak véges sok K-t tartalmazó részteste van.
12.** Legyen $K \leq L$ egy véges bővítés, melynek csak véges sok közbülső teste van. Tegyük fel továbbá, hogy $|K| = \infty$. Igazoljuk, hogy $L = K(\alpha)$ valamilyen $\alpha \in L$-re. (Az állítás igaz véges testekre is.)

---

13. Hány eleműek az alábbi halmazok?
    - (a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}))$;
    - (b) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$;
    - (c) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$;
    - $(d)^*$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
    - $(e)^{**}$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.
14. Van-e olyan K (0-karakterisztikájú) test, melyre $|\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), K)| = 1$? Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbb{Q} \leq K$ test esetén $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}), K)$ $0, 1$ vagy 5 elemű. *Adjunk példát olyan $\alpha \in \mathbb{C}$ számra (vagy α minimálpolinomjára), hogy $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}| = 5$, de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{R})$ háromelemű.
15.* Legyenek $p_1, \ldots, p_n$ páronként különböző pozitív prímszámok. Mennyi lesz $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ foka $\mathbb{Q}$ fölött?
16. (a) Igazoljuk, hogy ha L egy algebrai bővítése K-nak és $\tau\colon L \to L$ egy K-homomorfizmus, akkor τ bijektív. Először lássuk be véges bővítésekre.

    (b) Igaz marad-e az állítás, ha nem tesszük fel L-ről, hogy algebrai?