

## Vizsgakérdések (Algebra4 Matematikus)

Minden tételpárban az *a*) jelű tételt kell bizonyítani. A könnyített tematikában, mellyel legfeljebb 4-et lehet szerezni, a 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22 számú tételeket lehet kihagyni. Továbbá egy szabadon választott tételt mindenki kihagyhat a tematikából (azt a vizsgán előre meg kell mondani, hogy melyiket).

---

1. a) Testbővítések, fokszám tétel, egyszerű bővítések szerkezete.  
b) A kategóriák és funktorok definíciója.

---

2. a) Egy  $p$ -karakterisztikájú test pontosan akkor tökéletes, ha a  $p$ -Frobenius bijektív.  
b) Nakayama-lemma.

---

3. a)  $K$ -homomorfizmusok, kiterjesztési tétel  $\text{Hom}_K(L(\alpha), M)$ -re,  $\text{Hom}_K(K(\alpha), L)$  kapcsolata a minimálpolinom  $L$ -beli gyökeinek számával.  
b) A természetes transzformáció definíciója.

---

4. a) Minden véges szeparábilis bővítés egyszerű. Véges testekre is.  
b) Adjungált funktorpár definíciója.

---

5. a) Galois-bővítések ekvivalens jellemzései.  
b) Centrális egyszerű algebrák definíciója.

---

6. a) Körosztási, ill. radikálbővítések Galois-csoportja.  
b) A Jacobson-radikál ekvivalens jellemzései.

---

7. a) A Galois-elmélet főtétele.  
b) Szorzat és koszorzat kategóriákban.

---

8. a) Véges testek jellemzése.  
b) A Brauer csoport definíciója.

---

9. a) Algebrai lezárt létezése és egyértelműsége.  
b) Prímideál definíciója, ideál radikálja.

---

10. a) A kvadratikus reciprocitási tétel.  
b) Hilbert nullhelytetele.

---

11. a) Wedderburn tétele véges ferdetestekről.  
b) A Zariski-topológia alaptulajdonságai.

---

12. a) Szerkesztési feladatok megoldhatóságának jellemzése a Galois csoporttal. Nevezetes szerkesztési problémák.  
b) Keresztezett homomorfizmusok, első csoportkohomológia.

---

13. a) Egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának ekvivalens jellemzése a Galois-csoporttal.  
b) Wedderburn tétele végesdimenziós egyszerű algebrákról.

---

14. a) Algebrai egészek gyűrűt alkotnak.  
b) Schur-lemma, Jacobson-féle sűrűségi tétel.

---

15. a) Polinomgyűrű maximális ideáljai, Hilbert nullhelytetele.  
b) A Galois-elmélet főtétele.

---

- 
16. a) A Jacobson-radikál ekvivalens jellemzései, Nakayama-lemma.  
b) A kvadratikus reciprocitási tétel.
- 
17. a) Schur-lemma, Jacobson-féle sűrűségi tétel.  
b) Fokszámtétel testbővítésekre.
- 
18. a) Wedderburn tétele végesdimenziós egyszerű algebrákról.  
b)  $\text{Hom}_K(L, M)$  definíciója.
- 
19. a) Egy végesdimenziós algebra pontosan akkor centrális egyszerű, ha alkalmas véges bővítés fölött mátrixgyűrűvé válik.  
b) Szerkeszthetőség feltétele.
- 
20. a)  $n$ -edfokú centrális egyszerű  $D$  ferdetest hasad alkalmas  $n$ -edfokú bővítés fölött, mely részttest  $D$ -ben.  
b) Egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának ekvivalens jellemzése.
- 
21. a) Centrális egyszerű algebrák tenzorszorzata, Brauer-ekvivalencia, Brauer-csoport.  
b) Körosztási bővítés Galois-csoportja.
- 
22. a) Centrális egyszerű algebrák osztályozása keresztezett homomorfizmusokkal.  
b) Egy elem  $n$ -edik gyökével vett bővítés Galois-csoportja, ha az alaptest tartalmazza az  $n$ -edik egységgyököket.
-