Algebra4 matematikus

2. ZH – megoldások

2019. május 10.

1. A $\mathbb{F}_3[x,y]/(x^5,y^7)$ gyűrűben minden olyan elem nilpotens (jelesül $7+5-1=11$-edik hatványa 0), aminek konstans tagja 0. Speciálisan minden elem invertálható, aminek nem 0 a konstans tagja. Tehát ez egy lokális gyűrű az (x,y) maximális ideállal. Speciálisan ez a Jacobson-radikál is.

2. Az világos, hogy $y-x^2$ és $z-x^3$ benne van $\mathbb{I}(V)$-ben. Másrészt, ha $f(x,y,z)$ eltűnik V-n, akkor f-et (mint y polinomját) elosztva maradékosan $y-x^2$-tel és (mint z polinomját) $z-x^3$-bel, akkor egy $h(x)=f(x,y,z)-g_1(x,y,z)(y-x^2)-g_2(x,y,z)(z-x^3)$ egyváltozós $\mathbb{C}[x]$-beli polinomot kapunk, mely szintén eltűnik V-n, azaz $h(t)=0$ minden $t\in\mathbb{C}$-re. Ez csak úgy lehet, hogy $h=0$, azaz $f\in(y-x^2,z-x^3)$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathbb{I}(V)=(y-x^2,z-x^3)$. Másrészt ha $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$, akkor $y_0=x_0^2$ és $z_0=x_0^3$, azaz $(x_0,y_0,z_0)\in V$, tehát $V=\mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ Zariski zárt.

3. Mivel ζ primitív 24-edik egységgyök, ezért ζ^8 egy primitív harmadik egységgyök. Speciálisan a fokszámtétel szerint $|\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}(\zeta^8)|=\frac{\varphi(24)}{\varphi(3)}=\varphi(8)=4$. Ugyanakkor $\mathbb{Q}(\zeta)=\mathbb{Q}(\zeta^8)(\zeta^3)$, ahol ζ^3 egy primitív nyolcadik egységgyök, ezért $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\zeta^8))$ izomorf $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ egy részcsoportjával. Mivel utóbbi rendje 4 és $Z_2\times Z_2$-vel izomorf, ezért $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\zeta^8))\cong Z_2\times Z_2$. Közbülső test annyi van, ahány részcsoport ebben, ami 5 (a két triviális és 3 másodrendű).

4. Legyenek f gyökei $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ ($n=\deg(f)$), $K:=\mathbb{Q}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ és tegyük fel, hogy $\alpha_1\in\mathbb{R}$, de $\alpha_2\notin\mathbb{R}$. Ekkor $\overline{\alpha_2}$ is gyöke f-nek, például $\alpha_3=\overline{\alpha_2}$. A ι komplex konjugálás egy eleme $G:=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$-nak, melyre $\iota(\alpha_1)=\alpha_1$ és $\iota(\alpha_2)=\alpha_3$. Másrészt G tranzitívan hat f gyökein, azaz van olyan $\sigma\in G$, melyre $\sigma(\alpha_1)=\alpha_2$. Ekkor $\iota(\sigma(\alpha_1))=\iota(\alpha_2)=\alpha_3$, de $\sigma(\iota(\alpha_1))=\sigma(\alpha_1)=\alpha_2\neq\alpha_3$. Tehát $\iota\circ\sigma\neq\sigma\circ\iota$, azaz G nem lehet kommutatív.

5. Válasz: $p=2$ és $p\equiv 1 \pmod 4$ esetén.

   A $\mathbb{Q}(-1,p)$ kvaternióalgebra pontosan akkor hasad, ha a $-x^2+py^2=1$ egyenletnek van racionális megoldása. Ha $p=2$, akkor $x=y=1$ jó, tehát $\mathbb{Q}(-1,2)$ hasad. Ha $p\equiv -1 \pmod 4$, akkor a közös nevező négyzetével beszorozva és átrendezve az $u^2+v^2=pw^2$ egyenletnek keressük nemtirviális egész megoldását. Feltehetjük azt is, hogy $(u,v,w)=1$, hiszen a legnagyobb közös osztó négyzetével leoszthatunk. Viszont mivel a -1 kvadratikus nemmaradék modulo p, ezért $p\mid u^2+v^2$ csak úgy teljesülhet, ha $p\mid u$ és $p\mid v$, így $p^2\mid u^2+v^2$, azaz $p\mid w$ – ellentmondás. Tehát ha $p\equiv -1 \pmod 4$, akkor $\mathbb{Q}(-1,p)$ nem hasad. Azt kell még igazolni, hogy ha $p\equiv 1 \pmod 4$, akkor $\mathbb{Q}(-1,p)$ valóban hasad, erre két megoldást mutatunk.

   1. megoldás (a kétnégyzetszám-tételt használva): Ha $p\equiv 1 \pmod 4$, akkor p előáll két négyzetszám összegeként, azaz van olyan $u,v\in\mathbb{Z}$, melyre $u^2+v^2=p$. Nyilván $v\neq 0$ (p nem négyzetszám), így $x=\frac{u}{v}$, $y=\frac{1}{v}$ megoldás, hiszen $-\frac{u^2}{v^2}+p\frac{1}{v^2}=1$.

   2. megoldás (Hasse–Minkowski tételt és az $(a,b)_{\mathbb{Q}_\ell}$-re adott táblázatot használva): Azt kell belátni, hogy ha $p\equiv 1 \pmod 4$, akkor $\mathbb{Q}(-1,p)$ hasad $\mathbb{R}$ fölött és $\mathbb{Q}_\ell$ fölött minden ℓ prímre. $\mathbb{R}$ fölött hasad, hiszen $p>0$ négyzet $\mathbb{R}$-ben. Ha $\ell\equiv 1 \pmod 4$ (akár $\ell=p$), akkor -1 négyzet $\mathbb{Q}_\ell$-ben, ezért $\mathbb{Q}_\ell(-1,p)$ hasad. Ha p négyzetszám mod ℓ páratlan prím, akkor is hasad $\mathbb{Q}_\ell(-1,p)$, hiszen p négyzet $\mathbb{Q}_\ell$-ben. Ha pedig $\ell \equiv -1 \pmod 4$ és $\left(\frac{p}{\ell}\right) = -1$, akkor $\mathbb{Q}_\ell(-1,p) \cong \mathbb{Q}_\ell(-1,-1)$ hasad. Végezetül ha $\ell = 2$, akkor $p \equiv 1 \pmod 4$ miatt $\mathbb{Q}_2(-1,p) \cong \mathbb{Q}_2(-1,1)$ vagy $\mathbb{Q}_2(-1,-3)$, de mindkettő hasad. Az $\ell = 2$-t nem is kell ellenőrizni, hiszen páros sok prím van mindig, ahol nem hasad egy adott kvaternióalgebra.

6. A $\overline{\varphi}$ szürjektivitása azt jelenti, hogy $\varphi(M) + J(R)N = N$. Ez pedig azt jelenti, hogy $J(R) \cdot N/\varphi(M) = N/\varphi(M)$. Mivel N végesen generált, $N/\varphi(M)$ is az, ezért alkalmazhatjuk a Nakayama-lemmát, mely szerint $N/\varphi(M) = 0$, azaz $N = \varphi(M)$. Tehát φ szürjektív.

7. Ha $n = 1$, akkor kész vagyunk, ezért tegyük fel, hogy $n > 1$. Feltehetjük továbbá, hogy I lefedése rövidíthetetlen, azaz bármelyik P_i-t $(i = 1,\dots,n)$ elhagyva már nem kapunk lefedést. Speciálisan minden $i \in \{1,\dots,n\}$-re van olyan $a_i \in I \cap P_i$, melyre $a_i \notin P_j$, ha $j \neq i$ $(j = 1,\dots,n)$. Mivel P_j prímideál, ezért $b_j := \prod_{i=1, i\neq j}^n a_i \notin P_j$, de $b_j \in P_i \cap I$ $(i \neq j)$. Speciálisan $\sum_{j=1}^n b_j$ benne van I-ben, de nincs benne P_j-ben egyik $j \in \{1,\dots,n\}$-re sem, hiszen az összegben egy kivételével minden tag P_j-beli, az egyik (jelesül b_j) viszont nem. Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy $I \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_n$ és $n > 1$.