Algebra4 matematikus

2. ZH

2019. május 10.

A maximális pontszám minden feladatra 10 pont. A ZH jegye a pontszám tizedének egészrésze. Használni lehet minden írott és nyomtatott jegyzetet. A rendelkezésre álló idő 120 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Határozzuk meg az $\mathbb{F}_3[x,y]/(x^5,y^7)$ gyűrű Jacobson-radikálját.
2. Igazoljuk, hogy a $V = \{(t,t^2,t^3) \mid t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^3$ halmaz Zariski zárt és adjuk meg a V-n eltűnő háromváltozós polinomok $\mathbb{I}(V) \lhd \mathbb{C}[x,y,z]$ ideáljának egy véges generátorrendszerét.
3. Legyen ζ egy primitív 24-edik egységgyök. Hány közbülső teste van a $\mathbb{Q}(\zeta^8) \leq \mathbb{Q}(\zeta)$ bővítésnek (magát a két testet is beleértve)?
4. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy olyan irreducibilis polinom, melynek van valós és nem valós gyöke is. Igazoljuk, hogy f felbontási testének $\mathbb{Q}$ fölötti Galois-csoportja nemkommutatív.
5. Mely (pozitív) p prímszámokra hasad $\mathbb{Q}$ fölött a $\mathbb{Q}(-1,p)$ kvaternióalgebra? (Bármely az előadáson – vagy esetleg más tárgyból – akár bizonyítás nélkül kimondott tételt használhatunk, ha helyesen mondjuk ki.)
6. Legyen R egy egységelemes gyűrű, és $J(R)$ a Jacobson-radikálja. Tegyük fel továbbá, hogy $\varphi\colon M \to N$ egy R-modulus homomorfizmus az M és N végesen generált bal R-modulusok között, melyre a φ által indukált $\overline{\varphi}\colon M/J(R)M \to N/J(R)N$ homomorfizmus szürjektív. Igazoljuk, hogy φ is szürjektív.
7. Legyen R egy kommutatív egységelemes gyűrű, $I \lhd R$ egy ideál, $P_1,\dots,P_n \lhd R$ pedig prímideálok. Igazoljuk, hogy ha $I \subseteq P_1 \cup \cdots \cup P_n$, akkor van olyan $j \in \{1,\dots,n\}$, melyre $I \subseteq P_j$.