Algebra4 matematikus

1. ZH

2019. április 4.

A maximális pontszám minden feladatra 10 pont. A ZH jegye a pontszám tizedének egészrésze. Használni lehet egy saját kézzel írt A_4-es lapot. A rendelkezésre álló idő 120 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Hány elemű $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[10]{125}), \mathbb{Q}(\sqrt[20]{5}))$?

2. Határozzuk meg az $x^3 - 5$ polinom $\mathbb{Q}$ fölötti felbontási testét és Galois-csoportját.

3. Mely p prímekre irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött a $\Phi_6(x)$ hatodik körosztási polinom?

4. Legyenek n és m egymáshoz relatív prím 1-nél nagyobb egészek és K egy test, továbbá $\alpha \in K$. Igazoljuk, hogy $x^{nm} - \alpha$ pontosan akkor irreducibilis K fölött, ha $x^n - \alpha$ és $x^m - \alpha$ is irreducibilis.

5. Bontsuk irreducibilisek szorzatára az $x^{16} - x$ polinomot $\mathbb{F}_2$ és $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2(\alpha)$ fölött.

6. Legyen K egy olyan test, ami tartalmaz primitív n-edik egységgyököt ($n > 0$ egész) és legyen $a \in K$ (speciálisan $\mathrm{char}(K) \nmid n$). Igazoljuk, hogy $x^n - a$ pontosan akkor irreducibilis K fölött, ha a semmilyen $1 < d \mid n$-re sem d-edik hatvány K-ban.

7. Tegyük fel, hogy $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ algebrai egész valamely $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ racionális számokra.

   (*a*) Igazoljuk, hogy ekkor a $2a+2b\sqrt{2}$, $2a+2c\sqrt{3}$, $2a+2d\sqrt{6}$, $a^2+2b^2-3c^2-6d^2+(2ab-6cd)\sqrt{2}$, $a^2-2b^2+3c^2-6d^2+(2ac-4bd)\sqrt{3}$, $a^2-2b^2-3c^2+6d^2+(2ad-2bc)\sqrt{6}$ számok is algebrai egészek.

   (*b*) Igazoljuk, hogy $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ algebrai egész.

   (*c*) Mutassuk meg, hogy $a, c \in \mathbb{Z}$, továbbá vagy $b, d \in \mathbb{Z}$ vagy b és d is páratlan egész szám fele és ez a feltétel elégséges is ahhoz, hogy $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ algebrai egész legyen.