Algebra4 matematikus szakirány

9. gyakorlat

2019. április 25.

Legyen K egy test és $0 \neq a, b \in K$ tetszőleges. Tekintsük a $K(a,b)$ kvaternióalgebrát (melynek mint K fölötti vektortérnek a bázisa $1, i, j, k = ij$ úgy, hogy $i^2 = a$, $j^2 = b$, és $ij = -ji$). Emlékeztető: $K(a,b) \cong K(a, bc^2) \cong K(b,a) \cong K(a, -ab)$ ($0 \neq c \in K$ tetszőleges), továbbá $K(a,b)$ pontosan akkor izomorf $K(c,d)$-vel, ha a $-ax^2 - by^2 + abz^2$ és a $-cx^2 - dy^2 + cdz^2$ kvadratikus alakok ekvivalensek. Speciálisan $K(a,b)$ pontosan akkor hasad, ha a $-ax^2 - by^2 + abz^2 = 0$ egyenletnek K-ban van nemtriviális megoldása. Pl. $K(1,b)$ tetszőleges b esetén hasad.

1. Igazoljuk, hogy $K(a,b)$ hasad a $K(\sqrt{a})$, $K(\sqrt{b})$, $K(\sqrt{-ab})$ testek fölött.

2. Legyen p páratlan prím és $u \in \{2, \ldots, p-1\}$ kvadratikus nemmaradék mod p. Igazoljuk a következőket.
   - (a) $|\mathbb{Q}_p^\times / (\mathbb{Q}_p^\times)^2| = 4$, és ennek (mint $\mathbb{F}_2$ fölötti vektortérnek) a bázisa p és u (mellékosztálya).
   - (b) $|\mathbb{Q}_2^\times / (\mathbb{Q}_2^\times)^2| = 8$, és ennek bázisa -1, -3, és 2.
   - (c) Tegyük fel, hogy $p \equiv 1 \pmod 4$. Ekkor $\mathbb{Q}_p(u,p) \cong \mathbb{Q}_p(u, up) \cong \mathbb{Q}_p(p, up)$. Továbbá $\mathbb{Q}_p(p,p) \cong M_2(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Q}_p(u,u)$.
   - (d) Az $x^2 + y^2 = -1$ egyenletnek van megoldása $\mathbb{F}_p$-ben.
   - (e) Az $x^2 + y^2 = -1$ egyenletnek van megoldása $\mathbb{Q}_p$-ben. Hasonlóan az $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ egyenletnek van nemtriviális megoldása $\mathbb{Q}_p$-ben.
   - (f) Az $x^2 + py^2 + pz^2$ és az $x^2 - py^2 - pz^2$ kvadratikus alakok ekvivalensek $\mathbb{Q}_p$ fölött, azaz $\mathbb{Q}_p(-1, p) \cong \mathbb{Q}_p(-1, -p)$.
   - (g) $\mathbb{Q}_p(-1,-1)$ hasad.
   - (h) Ha $p \equiv -1 \pmod 4$, akkor $\mathbb{Q}_p(u,p) \cong \mathbb{Q}_p(-1,p) \cong \mathbb{Q}_p(-1,-p) \cong \mathbb{Q}_p(p,p) \cong \mathbb{Q}_p(-p,-p)$.
   - (i) $\mathbb{Q}_p(u,p)$ egy ferdetest, és izomorfia erejéig nincs másik nemhasadó kvaternióalgebra $\mathbb{Q}_p$ fölött.
   - (j)* $\mathbb{Q}_2(-1,-1)$ egy ferdetest, és izomorfia erejéig nincs másik nemhasadó kvaternióalgebra $\mathbb{Q}_2$ fölött.

3. Mutassuk meg, hogy ha A egy centrális egyszerű algebra K fölött és $n \geq 1$ egész, akkor $M_n(A)$ is centrális egyszerű algebra.

4. Legyen K egy test és $n, m \geq 1$ egészek. Igazoljuk, hogy $M_n(K) \otimes_K M_m(K) \cong M_{nm}(K) \cong M_n(M_m(K))$.

5. Igazoljuk, hogy ha A egy K-algebra és $n \geq 1$, akkor $M_n(K) \otimes_K A \cong M_n(A)$.

6. Legyen A egy centrális egyszerű algebra a K test fölött, ami felhasad a (véges) $K \leq L$ bővítés fölött, továbbá $L \leq F$ egy véges bővítés. Mutassuk meg, hogy A hasad F fölött is.

7. Legyen D_1 és D_2 két centrális egyszerű ferdetest a K test fölött, és tegyük fel, hogy $\dim_K D_1$ és $\dim_K D_2$ relatív prím. Igazoljuk, hogy $D_1 \otimes_K D_2$ is ferdetest. (Segítség: hánydimenziós lehet K fölött egy $L \lhd D_1 \otimes D_2$ balideál?)

Nehezebb feladatok

8. Igazoljuk, hogy az A n^2-dimenziós centrális egyszerű K-algebra pontosan akkor hasad K fölött, ha tartalmaz $K^{\oplus n} := \underbrace{K \oplus \cdots \oplus K}_{n}$-val izomorf részalgebrát.