Algebra4 matematikus szakirány

8. gyakorlat

2019. április 11.

1. Ha $A, B \lhd R$ (bal-) ideálok, akkor az AB szorzatot az ab alakú elemek által generált (bal-) ideálként értelmezzük. Igazoljuk, hogy ha A és B ideálok egy R kommutatív gyűrűben, akkor $AB \subseteq A \cap B$. Mutassunk példát olyan ideálokra, amikor egyenlőség van, és olyanra is, amikor nincs egyenlőség.

2. Mutassuk meg, hogy egy kommutatív egységelemes R gyűrű I ideálja pontosan akkor prímideál, ha minden $A, B \lhd R$ ideálra $AB \subseteq I$ esetén $A \subseteq I$ vagy $B \subseteq I$. (Mj.: nemkommutatív gyűrűkre az utóbbi feltétellel definiálják a prímideálokat.)

3. Tegyük fel, hogy $A, B \lhd R$ ideálok egy $1 \in R$ kommutatív gyűrűben, melyekre $P := A \cap B \lhd R$ prímideál. Igazoljuk, hogy $A = P$ vagy $B = P$.

---

4. Mi $\mathbb{Z}_p$ Jacobson-radikálja? És $\mathbb{Z}_p[[X]]$-é? (Itt $\mathbb{Z}_p$ a p-adikus egészek gyűrűjét jelöli.)

5. Legyen K test. Mi a K feletti $n \times n$-es felsőháromszög-mátrixok gyűrűjének Jacobson-radikálja?

6. Igazoljuk, hogy $J(R/J(R)) = 0$.

7. Mutassuk meg, hogy $J(R)$ tartalmaz minden nilpotens balideált. (Egy $L \lhd_b R$ balideál nilpotens, ha van olyan $n \geq 1$ egész, melyre $L^n = 0$.)

8. Igazoljuk, hogy $J(R)$-ben nincs nem nulla idempotens elem. (Idempotens egy $e \in R$ elem, ha $e^2 = e$. Segítség: Alkalmazzuk a Nakayama-lemmát az e által generált balideálra, mint R-modulusra.)

9. Igazoljuk, hogy egységelemes gyűrű Jacobson-radikálja csak akkor lehet direkt összeadandó (mint balideál), ha 0, azaz ha $J(R) \oplus L = R$ valamely L balideálra, akkor $J(R) = 0$.

10. Adjunk példát olyan nem végesen generált M modulusra alkalmas R gyűrű felett, amire nem igaz a Nakayama lemma állítása. (Segítség: Legyen R integritási tartomány, $J(R) \neq 0$, és M az R hányadosteste.)

Nehezebb feladatok

11. Igazoljuk, hogy egy $1 \in R$ kommutatív noether gyűrűben minden metszetirreducibilis valódi radikálideál prímideál. (Egy $I \lhd R$ ideál metszetirreducibilis, ha $A \cap B = I$ esetén $A = I$ vagy $B = I$.)

12. Legyen $I = \sqrt{I} \lhd K[x_1, \ldots, x_n]$ egy radikálideál az algebrailag zárt K test fölötti n-változós polinomgyűrűben. Igazoljuk, hogy I előáll *véges sok* prímideál metszeteként is, sőt, ha a metszet rövidíthetetlen, akkor a benne szereplő prímideálok egyértelműek.

13. Legyen R egy egységelemes (nem felt. kommutatív) gyűrű, $I \lhd R$ egy nilpotens ideál, $\overline{e} \in R/I$ egy idempotens elem. Igazoljuk, hogy van olyan $f \in R$ idempotens elem, melynek I szerinti mellékosztálya $\overline{e}$ (azaz $\overline{e}$-nek van idempotens felemeltje).