Algebra4 matematikus szakirány

7. gyakorlat

2019. március 28.

1. Legyen $I = (x^2, xy^2) \lhd \mathbb{C}[x, y]$. Határozzuk meg a $\mathbb{V}(I) \subset \mathbb{C}^2$ halmazt és az $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) \lhd \mathbb{C}[x, y]$ ideált.
2. Azonosítsuk az n-edfokú normált egyváltozós komplex polinomok terét $\mathbb{C}^n$-nel (tehát $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$). Igazoljuk, hogy azon polinomok, melyeknek van többszörös gyöke egy Zariski zárt halmazt alkotnak $\mathbb{C}^n$-ben.
3. Azonosítsuk az $n \times k$-as komplex mátrixok halmazát $\mathbb{C}^{nk}$-val a szokásos koordinátázással. Igazoljuk, hogy az alábbi részhalmazok algebraiak (Zariski zártak):
   - (a) A szinguláris (nem-invertálható) mátrixok ($n = k$).
   - (b) A legfeljebb r rangú mátrixok ($r \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$).
   - (c) Az 1-determinánsú mátrixok $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ csoportja ($n = k$).
   - (d) Azon mátrixok, melyeknek van többszörös sajátértéke ($n = k$).
4. Igazoljuk, hogy algebrailag zárt test fölött a diagonalizálható mátrixok sűrűn vannak a Zariski-topológiában az összes mátrix között. Adjunk ennek segítségével új bizonyítást a Cayley–Hamilton-tételre.
5. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{C}^n$ nem Hausdorff a Zariski-topológiában.
6. Igazoljuk, hogy $\mathbb{C}^n$ tetszőleges nemüres Zariski-nyílt részhalmaza sűrű.
7. Igazoljuk, hogy $\mathbb{C}^n$ kompakt a Zariski-topológiában (azaz minden nyílt fedésből kiválasztható véges részfedés). Mj.: Az algebrai geometriában ezt a tulajdonságot *kvázikompaktnak* nevezik, mert a kompaktságba beleértik azt is, hogy a tér Hausdorff.
8. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C}^2$-en a Zariski topológia finomabb, mint a két Zariski topológia szorzat-topológiája $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$-n.

Nehezebb feladatok

9. Legyenek A és B végesdimenziós egységelemes (nem feltétlenül kommutatív) $\mathbb{Q}$-algebrák és jelölje $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ az algebrai számok testét. Igazoljuk, hogy ha létezik egy egységelemes $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} A \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} B$ homomorfizmus, akkor létezik egy egységelemes $\overline{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} A \to \overline{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} B$ homomorfizmus is.
10. Legyen A egy végesdimenziós K-algebra (K végtelen test), M és N pedig végesen generált A-modulusok. Igazoljuk, hogy ha $\overline{K} \otimes_K M$ és $\overline{K} \otimes_K N$ izomorfak (mint $\overline{K} \otimes_K A$-modulusok), akkor $M \cong N$ (mint A-modulusok).
11. Mutassuk meg, hogy a $\{(z, e^z) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$ halmaz nem algebrai.