Algebra4 matematikus szakirány

6. gyakorlat

2019. március 21.

1. A következő számok közül melyek algebrai egészek? $\sqrt{5}/\sqrt{2}$, $(1+\sqrt{3})/2$, $(\sqrt{3}+\sqrt{7})/2$, $\frac{3+2\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}$, $(1+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{100})/3$, $2\cos(2\pi/19)$.

2. Igazoljuk, hogy ha α^n algebrai egész valamely $\alpha \in \mathbb{C}$-re és $n \geq 1$ egészre, akkor α is algebrai egész.

3. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ nem egészre zárt.

4. Határozzuk meg az algebrai egészeket a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ testben, ha $d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes.

5. Legyen $\mathcal{O}$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ testben az egészek gyűrűje ($d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes) és $p \nmid 2d$ egy prím. Igazoljuk, hogy p pontosan akkor prímtulajdonságú $\mathcal{O}$-ban, ha $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$. Mi a helyzet, ha $p \mid d$? És ha $p = 2$?

6. Legyen $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ egy harmadfokú normált polinom, aminek nincs többszörös gyöke. Igazoljuk, hogy a $\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - f(x))$ gyűrű egészre zárt.

7. Igazoljuk, hogy a $\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3)$ gyűrű nem egészre zárt.

8. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ egy irreducibilis normált polinom. Tegyük fel, hogy f $\mathbb{Q}$ feletti felbontási testének Galois-csoportja Abel és $f(\alpha) = 0$ valamilyen $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ számra. Igazoljuk, hogy f összes többi (komplex) gyöke is 1 abszolútértékű.

---

9. Legyen K egy test, és $L = K(y_1, \ldots, y_n)$ az n-változós K feletti racionális törtfüggvények teste. Igazoljuk, hogy az $x^n + y_1 x^{n-1} + \cdots + y_n \in L[x]$ polinom irreducibilis, és a felbontási testének a Galois-csoportja S_n. Tehát az általános n-edfokú egyenletre nincsen gyökképlet, ha $n \geq 5$.

Nehezebb feladatok

10. Igazoljuk, hogy ha α egy olyan algebrai egész szám, melynek az összes Galois-konjugáltja 1 abszolútértékű, akkor α egységgyök.

11. Határozzuk meg az algebrai egészeket a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ testben.

12. Ebben a feladatban azt igazoljuk, hogy ha R egy egészre zárt gyűrű, akkor $R[x]$ is az.

    (*a*) Először vezessük vissza a feladatot arra, hogy $R[x]$ egészre zárt $K[x]$-ben. ($K[x]$ benne van $R[x]$ hányadostestében és egészre zárt, hiszen főideálgyűrű.)

    (*b*) Igazoljuk, hogy ha $f, g \in K[x]$ normált polinomok, melyekre $fg \in R[x]$, akkor f és g is $R[x]$-ben van. (Segítség: bontsuk mindkét polinomot gyöktényezők szorzatára egy bővebb testben.)

    (*c*) Ha egy $f \in K[x]$ gyöke egy $R[x]$ feletti k fokú normált polinomnak, akkor $f + x^N$ is gyöke egy ugyancsak k fokú normált polinomnak. Növeljük N-et és a normált polinom (melynek $f + x^N$ gyöke) konstans tagja felírható két normált polinom szorzataként, melyek közül az egyik épp $f + x^N$.