Algebra4 matematikus szakirány

2. gyakorlat

2019. február 21.

1. Hány eleme van $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathbb{C})$-nek? És hány olyan eleme van, ami $\sqrt{2}$-t $(-\sqrt{2})$-be viszi?

2. Hány olyan eleme van $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}), \mathbb{C})$-nek, ami $\sqrt[3]{5}$-t $\varepsilon\sqrt[3]{5}$-be viszi, ahol ε egy primitív harmadik egységgyök? Hová viszik ezek a $\mathbb{Q}$-homomorfizmusok $\sqrt[6]{5}$-t?

3. Keressünk olyan n egész számot, melyre a $\sqrt{3} + n\sqrt{5}, -\sqrt{3} + n\sqrt{5}, \sqrt{3} - n\sqrt{5}, -\sqrt{3} - n\sqrt{5} \in \mathbb{C}$ számok mind különbözők. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + n\sqrt{5})$.

4. Találjunk olyan $\alpha \in \mathbb{C}$ komplex számot, melyre $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$.

---

5. Igazoljuk, hogy a mod p együtthatós racionális törtfüggvények $\mathbb{F}_p(x)$ teste nem tökéletes.

6. Legyen $L = \mathbb{F}_p(x, y)$ (kétváltozós racionális törtfüggvények), $K = \mathbb{F}_p(x^p, y^p)$. Igazoljuk, hogy nincs olyan $\alpha \in L$, melyre $L = K(\alpha)$.

7. Legyen $K \leq L$ p-karakterisztikájú testeknek egy véges bővítése. Igazoljuk, hogy minden $\alpha \in L$-re van olyan $n \geq 0$, melyre α^{p^n} szeparábilis K felett.

---

8. Mi $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \varepsilon)/\mathbb{Q}$ Galois-csoportja, ha ε egy primitív harmadik egységgyök?

9. Igazoljuk, hogy egy n-edfokú polinom felbontási teste legfeljebb $n!$ fokú.

Nehezebb feladatok

10. Legyen L/K egy algebrai bővítése p-karakterisztikájú testeknek. Azt mondjuk, hogy L/K tisztán inszeparábilis, ha L minden K felett szeparábilis eleme K-ban van. Egy $\alpha \in L$-ről azt mondjuk, hogy tisztán inszeparábilis, ha $K(\alpha)/K$ tisztán inszeparábilis. Igazoljuk, hogy α pontosan akkor tisztán inszeparábilis, ha minimálpolinomja $x^{p^n} - a$ alakú $(a \in K)$.

11. Igazoljuk, hogy egy L/K algebrai bővítésben a tisztán inszeparábilis elemek (egy K-t tartalmazó) résztestet alkotnak.

12. Legyen $L = \mathbb{F}_p(x, y)$ (kétváltozós racionális törtfüggvények), $K = \mathbb{F}_p(x^p, y^p - y - x)$. Bizonyítsuk be, hogy $|L : K| = p^2$ és határozzuk meg az L/K bővítés maximális szeparábilis résztestét.

13. Legyen $L = \mathbb{F}_p(x, y)$ mint előbb és $M = L(\alpha)$, ahol $\alpha^{p^2} = x\alpha^p + xy$. Bizonyítsuk be, hogy $|M : L| = p^2$ és M/L inszeparábilis. Viszont M/L L felett tisztán inszeparábilis elemei csak L elemei.

14. Igazoljuk, hogy minden $g(T) \in \mathbb{F}_p[[T]]$ formális hatványsorra van olyan $f(T) \in \mathbb{F}_p[[T]]$, melyre $f(T) - f(T)^p = Tg(T)$. Mj.: Ez azt jelenti, hogy $(\mathrm{id} - \mathrm{Frob}_p)\colon \mathbb{F}_p[[T]] \to \mathbb{F}_p[[T]]$ képe éppen $T\mathbb{F}_p[[T]]$. Mi a magja ennek a leképezésnek?

15. Legyen $\mathbb{Z}_p[[T]]$ a p-adikus egészek feletti formális hatványsorok gyűrűje és definiáljuk a $\varphi\colon \mathbb{Z}_p[[T]] \to \mathbb{Z}_p[[T]]$ gyűrűhomomorfizmust a $\varphi(f)(T) := f((T+1)^p - 1)$ képlettel. (Miért értelmes?) Igazoljuk, hogy $\mathrm{id} - \varphi$ (Abel-csoport homomorfizmus) képe éppen $T\mathbb{Z}_p[[T]]$, magja pedig a konstans hatványsorokból áll. (Itt $(\mathrm{id} - \varphi)(f)(T) = f(T) - \varphi(f)(T)$.)