Algebra4 matematikus szakirány

10. gyakorlat

2019. május 2.

1. Legyen $\omega \in K$ egy primitív n-edik egységgyök. Igazoljuk, hogy a $K(a,b)_\omega := \langle x, y \mid x^n = a,\ y^n = b,\ xy = \omega yx\rangle$ algebra centrális egyszerű.
2. Mutassuk meg, hogy $K(\sqrt[n]{a})$ fölött hasad $K(a,b)_\omega$.
3. Igazoljuk, hogy ha G triviálisan hat H-n, akkor a $G \to H$ keresztezett homomorfizmusok nem mások, mint a $G \to H$ csoporthomomorfizmusok.
4. Legyen $0 \to A \to B \to C \to 0$ egy rövid egzakt sorozata egy G véges csoport hatásával ellátott Abel-csoportoknak (tehát a leképezések kompatibilisek a G-hatással). Igazoljuk, hogy az indukált
$$0 \to A^G \to B^G \to C^G \to H^1(G,A) \to H^1(G,B) \to H^1(G,C)$$
sorozat egzakt. Mik az összekötő leképezések?
5. Tegyük fel, hogy $\zeta \in K$ egy primitív n-edik egységgyök, L/K pedig egy Galois-bővítés n-edrendű ciklikus Galois-csoporttal, melynek $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ egy generátoreleme. Mutassuk meg, hogy az $f\colon G \to L^\times$ csoporthomomorfizmus, melyre $f(\sigma^k) = \zeta^k$ egyben egy keresztezett homomorfizmus is. Mit mond ebben az esetben $H^1(G, L^\times)$ trivialitása? Adjunk új bizonyítást arra, hogy L egy alkalmas K-beli elem n-edik gyökével vett bővítés.

Nehezebb feladatok

Egy R egységelemes gyűrű fölötti M modulust féligegyszerűnek nevezünk, ha minden $N \le M$ részmodulus direktösszeadandó, azaz van olyan $N' \le M$ részmodulus, melyre $N \oplus N' = M$. Egy R egységelemes gyűrű féligegyszerű, ha mint saját maga fölötti bal-modulus féligegyszerű. Az alábbiakban belátjuk, hogy a következők ekvivalensek: (i) R féligegyszerű; (ii) R bal-artin és $J(R) = 0$; (iii) R véges sok ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű direktösszege.

6. Igazoljuk, hogy az alábbiak ekvivalensek.
   - (i) M féligegyszerű R-modulus.
   - (ii) M egyszerű modulusok összege.
   - (iii) M egyszerű modulusok direkt összege.
7. $J(R)$ annullál minden féligegyszerű modulust. Speciálisan, ha R féligegyszerű, akkor $J(R) = 0$.
8. Legyen $R = \bigoplus_{j=1}^k M_{n_j}(D_j)$ ferdetest fölötti teljes mátrixgyűrűk véges direkt összege. Ekkor R féligegyszerű. (Végtelen direkt összeg esetén is, csak akkor nem egységelemes.) Továbbá R fölött izomorfia erejéig pontosan k darab egyszerű modulus van. Mik ezek?
9. Ha R féligegyszerű, akkor R fölött véges sok egyszerű modulus van izomorfia erejéig. Sőt, R mint saját maga feletti bal-modulus véges sok egyszerű modulus direkt összege, így bal-artin.
10. Ha R bal-artin és M egyszerű R-modulus, akkor M végesdimenziós vektortér a $D := \mathrm{End}_R(M)^{op}$ ferdetest fölött. Speciálisan az indukált $R \to M_{\dim_D M}(D)$ gyűrűhomomorfizmus szürjektív.
11. Legyen R bal-artin és $J(R) = 0$.
   - (a) Legyen $\{M_j\}$ $(j \in J)$ az összes páronként nemizomorf egyszerű modulus, és M_j annullátora I_j. Ekkor I_j véges metszetei közt van minimális. Mivel $\bigcap_{j\in J} I_j = J(R) = 0$, ezért van $j_1, \dots, j_k \in J$, melyre $\bigcap_{i=1}^k I_{j_i} = 0$. Legyen k minimális ilyen és $D_i := \mathrm{End}_R(M_{j_i})^{op}$, $n_i := \dim_{D_i} M_{j_i}$.
   - (b) A $\varphi\colon R \to \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(D_i)$ gyűrűhomomorfizmus injektív, és $\varphi(R)$ vetülete $M_{n_i}(D_i)$-re szürjektív minden $i = 1, \dots, k$-ra.
   - (c) Mivel k minimális, ezért $\varphi(\bigcap_{\ell\ne i,\ \ell=1}^k I_\ell) \ne 0$, és ez egy ideál $M_{n_i}(D_i)$-ben, tehát az egész $M_{n_i}(D_i)$.
   - (d) φ egy gyűrűizomorfizmus.