Algebra4 matematikus szakirány

1. gyakorlat

2019. február 14.

1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$.

2. A $\pi + 3, 5\pi + 6, \pi + \sqrt{2}, \pi^2 + 2\pi + 2, \sqrt{\pi}$ számok közül melyek algebraiak? (Használjuk fel, hogy π transzcendens.)

3. Határozzuk meg $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ felett. Mik lesznek $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ résztestei?

4. Legyen $L = K(\alpha, \beta)$, ahol $|K(\alpha) : K| = m$, $|K(\beta) : K| = n$ és $(m, n) = 1$. Igazoljuk, hogy $|K(\alpha, \beta) : K| = mn$. Elhagyható-e az a feltétel, hogy $(m, n) = 1$?

5. Legyen R egy integritási tartomány, és K egy olyan részgyűrűje R-nek, ami test, és $\dim_K R < \infty$. Igazoljuk, hogy R test.

6. Legyen α páratlan fokú elem egy K test felett. Igazoljuk, hogy $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

7. Legyen α algebrai K felett. Igazoljuk, hogy $K(\alpha)$-nak véges sok K-t tartalmazó részteste van.

---

8. Legyen $K \leq L$ egy testbővítés, és $\alpha, \beta \in L$ transzcendens elemek K felett. Igazoljuk, hogy α pontosan akkor algebrai $K(\beta)$ felett, ha β algebrai $K(\alpha)$ felett.

---

9. Hány eleműek az alábbi halmazok? (Itt $K \leq L_1$, $K \leq L_2$ esetén $\mathrm{Hom}_K(L_1, L_2)$ azon $\tau\colon L_1 \to L_2$ testhomomorfizmusok halmazát jelöli, melyekre $\tau_K = \mathrm{id}_K$.)
   - (a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}))$;
   - (b) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{C})$;
   - (c) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$;
   - (d) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{C})$;
   - (e) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{R})$;
   - (f) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$;
   - (g) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$;
   - (h) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

10. (a) Igazoljuk, hogy ha L egy algebrai bővítése K-nak és $\tau\colon L \to L$ egy K-homomorfizmus, akkor τ bijektív. Először lássuk be véges bővítésekre.

    (b) Igaz marad-e az állítás, ha nem tesszük fel L-ről, hogy algebrai?

Nehezebb feladatok

11. Legyenek $p_1, \ldots, p_n$ páronként különböző pozitív prímszámok. Mennyi lesz $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ foka $\mathbb{Q}$ fölött?

12. Legyen $K \leq L$ egy véges bővítés, melynek csak véges sok közbülső teste van. Tegyük fel továbbá, hogy $|K| = \infty$. Igazoljuk, hogy $L = K(\alpha)$ valamilyen $\alpha \in L$-re. (Az állítás igaz véges testekre is.)

13. Legyen $K(x)$ a racionális törtfüggvények teste (azaz $K[x]$ hányadosteste) a K test felett. Igazoljuk, hogy minden $K < L < K(x)$ valódi közbülső testre létezik olyan $g(x) \in K(x)$ racionális törtfüggvény, melyre $L = K(g(x))$.