Vizsgakérdések (Algebra4 Matematikus)

Minden tételpárban az *a*) jelű tételt kell bizonyítani.

1. *a*) Testbővítések, K-homomorfizmusok, kiterjesztési tétel $\mathrm{Hom}_K(L(\alpha), M)$-re, $\mathrm{Hom}_K(K(\alpha), L)$ kapcsolata a minimálpolinom L-beli gyökeinek számával.

   b) A csoportalgebra definíciója.

2. *a*) Tökéletes testek jellemzése a Frobenius endomorfizmussal, illetve a karakterisztikával.

   b) Wedderburn–Artin tétel.

3. *a*) Minden véges szeparábilis bővítés egyszerű. Véges testekre is. (Csak 5-ösért.)

   b) Kategóriák és funktorok, természetes transzformációk, adjungált funktorok.

4. *a*) Galois-bővítések ekvivalens jellemzései.

   b) $\mathbb{R}$ feletti véges dimenziós algebrák.

5. *a*) Körosztási, ill. radikálbővítések Galois-csoportja.

   b) Csoportreprezentációk, karakterek (definíciók).

6. *a*) A Galois-elmélet főtétele.

   b) Frobenius tétele az $\mathbb{R}$ feletti végesdimenziós asszociatív algebrákról.

7. *a*) Véges testek jellemzése.

   b) Csoportreprezentáció karaktere.

8. *a*) A kvadratikus reciprocitási tétel. (Csak 5-ösért.)

   b) Féligegyszerű gyűrűk ekvivalens jellemzései.

9. *a*) Wedderburn tétele véges ferdetestekről.

   b) Adjungált funktorpár definíciója.

10. *a*) Egyenletek gyökjelekkel való megoldhatósága, szerkesztések.

    b) Ortogonalitási relációk.

11. *a*) Dedekind tétele a K-homomorfizmusok lineáris függetlenségéről. Hilbert 90-es tétele. (Csak 5-ösért.)

    b) Maschke tétele a csoportalgebráról.

12. *a*) Algebrai lezárt létezése és egyértelműsége. (Csak 5-ösért.)

    b) Burnside kétprímes tétele.

13. *a*) Egész elemek integritási tartomány fölött, jellemzésük modulusbővítéssel. Egész elemek részgyűrűt alkotnak. (Csak 5-ösért.)

    b) Irreducibilis reprezentációk száma, Abel-csoport irreducibilis reprezentációi.

14. *a*) A tenzorszorzat konstrukciója.

    b) Szeparábilis bővítések ekvivalens jellemzései.

15. *a*) Kategóriák és funktorok, példák. A tenzor és Hom egymás adjungáltjai.

    b) A kvadratikus reciprocitási tétel.

16. *a*) A tenzorszorzat jobbegzakt. (Csak 5-ösért.)

    b) Egész elemek integritási tartomány felett, jellemzésük modulusbővítéssel.

17. *a*) Féligegyszerű modulusok és féligegyszerű gyűrűk ekvivalens jellemzései (A Jacobson radikálos jellemzés és a Wedderburn–Artin nem kell).

    b) A tenzorszorzat definíciója.

18. *a*) A Jacobson radikál ekvivalens jellemzései, Nakayama lemma.

    b) Hilbert 90-es tétele.

19. *a*) Egy gyűrű pontosan akkor féligegyszerű, ha bal-Artin és Jacobson radikálja 0. (Csak 5-ösért.)

    b) A Galois-elmélet főtétele.

20. *a*) Wedderburn–Artin tétel. (Csak 5-ösért.)

    b) Egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának ekvivalens jellemzése.

21. *a*) Csoportalgebra, Maschke tétele.

    b) $\mathrm{Hom}_K(L, M)$ definíciója.

22. *a*) Frobenius tétele a végesdimenziós $\mathbb{R}$ feletti asszociatív algebrákról.

    b) Szerkeszthetőség feltétele.

23. *a*) Csoportreprezentációk, kapcsolat a csoportalgebra feletti modulusokkal. Irreducibilis reprezentációk száma, Abel-csoport irreducibilis reprezentációi. (Csak 5-ösért.)

    b) Norma és nyom definíciója.

24. *a*) Karakterek függetlensége, a csoportalgebra idempotensei, ortogonalitási relációk. (Csak 5-ösért.)

    b) Véges testek jellemzése, Wedderburn tétele.

25. *a*) $\omega\colon Z(\mathbb{C}G) \to \mathbb{C}$ algebrahomomorfizmusok, speciális értékeik, azok számelméleti tulajdonságai. Burnside kétprímes tétele. (Csak 5-ösért.)

    b) Tökéletes test definíciója és ekvivalens jellemzése.