Kvaternióalgebrák

Az alábbi jegyzetben az órán tanult, kvaternióalgebrák ekvivalens jellemzéseiről szóló tételt bizonyítjuk.

1. Definíció. *Legyen K egy test, $a, b \in K^\times$, és tegyük fel, hogy $\mathrm{char}(K) \neq 2$. A $K(a,b)$ kvaternióalgebra egy K-feletti 4-dimenziós egységelemes asszociatív algebra, melynek $1, i, j, k \in K(a,b)$ egy bázisa K feletti vektortérként, és a szorzás teljesíti az $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = k$, $ji = -k$ azonosságokat. Az A egységelemes asszociatív K-algebrát (K feletti) kvaternióalgebrának nevezzük, ha van olyan $a, b \in K^\times$, melyre $A \cong K(a,b)$.*

Egyszerű számolás mutatja, hogy a disztributív és asszociatív szabály szerint a fenti szorzás tetszőleges $a, b \in K^\times$ esetén egyértelműen kiterjeszthető $K(a,b)$-re úgy, hogy $K(a,b)$ egy egységelemes asszociatív K-algebra legyen. Pl. $ik = i(ij) = (i^2)j = aj$.

2. Példa. *A szokásos kvaterniók $\mathbb{H}$ gyűrűje izomorf az $\mathbb{R}(-1,-1)$ gyűrűvel. Továbbá ha K tetszőleges test, akkor $K(1,b) \cong M_2(K)$ (2×2-es mátricgyűrű). Az izomorfizmust az $i \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ leképezés adja meg.*

Vegyük észre, hogy $K(ac^2, b) \cong K(a,b) \cong K(b,a)$ tetszőleges $a, b, c \in K^\times$ esetén. Valóban, ha $(ci)^2 = ac^2$ teljesül $K(a,b)$-ben, ezért a $K(ac^2, b) \to K(a,b)$ leképezés, melyre $i \mapsto ci$, $j \mapsto j$, egy izomorfizmus. Másrészt a $K(a,b) \to K(b,a)$, $i \mapsto j$, $j \mapsto i$ is izomorfizmust ad. Továbbá ha $K \leq F$ egy testbővítés, akkor $F \otimes_K K(a,b) \cong F(a,b)$ természetes módon. Speciálisan $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(-1,-1) \cong \mathbb{C}(1,-1) \cong M_2(\mathbb{C})$, hiszen $-1 = i^2 \in (\mathbb{C}^\times)^2$.

3. Tétel. *Legyen D egy 4-dimenziós egységelemes asszociatív K-algebra ($\mathrm{char}(K) \neq 2$). Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) *D kvaternióalgebra;*

(ii) *$Z(D) = K$ és D egyszerű gyűrű (azaz nincs nemtriviális kétoldali ideálja);*

(iii) *$\overline{K} \otimes_K D \cong M_2(K)$;*

(iv) *$D \cong M_2(K)$ vagy D olyan ferdetest, melyre $Z(D) = K$.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (iii)$ a fenti megjegyzéshez hasonlóan következik, hiszen a-nak van egy c négyzetgyöke $\overline{K}$-ban, ezért $\overline{K}(a,b) \cong \overline{K}(c^2,b) \cong \overline{K}(1,b) \cong M_2(\overline{K})$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Vegyük észre, hogy $M_2(\overline{K})$ centruma 1-dimenziós (mint $\overline{K}$ feletti vektortér), és tartalmazza $\overline{K} \otimes_K Z(D)$-t. Tehát $Z(D)$ is maximum 1 dimenziós lehet csak K felett, de K-t tartalmazza, így $Z(D) = K$. Továbbá ha $I \lhd D$ ideál, akkor $\overline{K} \otimes_K I \lhd \overline{K} \otimes_K D \cong M_2(\overline{K})$. Viszont $M_2(\overline{K})$ egyszerű gyűrű, így D is az.

$(ii) \Rightarrow (iv)$: Tegyük fel, hogy D nem ferdetest, azaz van olyan $0 \neq x \in D$, ami nem invertálható. Ha pl. bal inverze nincs, akkor az azt jelenti, hogy $x \in Dx \subsetneq D$. Tehát Dx egy nemtriviális balideál D-ben. Legyen $0 \neq I$ egy minimális dimenziójú balideál D-ben. Ekkor a D elemeivel való balszorzás egy K-lineáris leképezés I-n, tehát kapunk egy $\varphi\colon D \to \mathrm{End}_K(I) \cong M_{\dim I}(K)$ K-algebra homomorfizmust. Ráadásul ez injektív, mivel D egyszerű (és $\mathrm{Ker}\varphi \lhd D$). Tehát $1 < \dim_K I < 4$, hiszen $\dim_K I = 1$ esetén $M_1(K) = K$ csak 1-dimenziós, ezért nem képezhető bele a 4-dimenziós D injektíven. Továbbá ha $\dim_K I = 3$ lenne, akkor I lenne az egyetlen nemtriviális balideál D-ben, hiszen $I_1 \neq I_2$ ($\dim_K I_1 = \dim_K I_2 = 3$) nemtriviális balideálok esetén $0 < \dim_K I_1 \cap I_2 < \dim_K I_1 = 3$ lenne, ami ellentmond $\dim I$ minimalitásának. Viszont ekkor I jobbideál is D-ben, mivel $y \in D$ esetén Iy is egy legfeljebb 3-dimenziós balideál D-ben, azaz $Iy = I$ vagy 0, de mindenképp $Iy \subseteq I$. Ez ellentmondás, hiszen D egyszerű, azaz nincs benne kétoldali ideál. Azt kaptuk tehát, hogy $\dim_K I = 2$, ezért $\dim_K \mathrm{End}_K(I) = 4$, így φ nemcsak injektív, hanem szürjektív is, speciálisan $D \cong M_2(K)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Azt már láttuk, hogy $M_2(K) \cong K(1, b)$ egy kvaternióalgebra. Legyen tehát D egy 4-dimenziós ferdetest, melyre $Z(D) = K$. Ekkor minden $\alpha \in D$ algebrai K felett (a hatványai lineárisan összefüggők), és $K \leq K(\alpha) \lneq D$, hiszen D nemkommutatív ($Z(D) = K$). Mivel D vektortér $K(\alpha)$ felett is, ezért $|K(\alpha) : K| \mid 4$ (fokszámtétel), ezért minden $\alpha \in D \setminus K$-ra $|K(\alpha) : K| = 2$. Viszont $\mathrm{char}(K) \neq 2$ miatt minden másodfokú bővítés megkapható egy elem négyzetgyökének adjungálásával, ezért van olyan $i \in K(\alpha)$ elem, melyre $i^2 =: a \in K^\times$ és $K(\alpha) = K(i)$. Mivel $i \notin K = Z(D)$, ezért az i-vel való $\varphi_i \colon D \to D$ konjugálás nemtriviális automorfizmusa D-nek, melynek négyzete az $i^2 = a$-val való konjugálás, ami az identitás, hiszen $a \in K = Z(D)$. Tehát φ_i-nek a sajátértékei ± 1, és mivel φ_i nem az identitás (és diagonalizálható, hiszen négyzete az identitás), ezért a -1 is sajátértéke. Tehát van olyan $0 \neq j \in D$, melyre $iji^{-1} = -j$. Ekkor viszont $ij^2i^{-1} = (-j)^2 = j^2$, tehát j^2 felcserélhető i-vel. Viszont az i-vel felcserélhető elemek egy $C_i(D)$ részferdetestet alkotnak D-ben, melyre $K(i) \leq C_i(D) \lneq D$ miatt $C_i(D) = K(i)$ (fokszámtétel). Vagyis $j^2 = b + ci$ alakba írható, ahol $b, c \in K$. Viszont ha $c \neq 0$ lenne, akkor $i = (j^2 - b)/c \in K(j)$ lenne, azaz i és j felcserélhetők lennének, ami ellentmondana $iji^{-1} = -j$-nek.Tehát $c = 0$ és $j^2 = b \in K$, azaz beláttuk, hogy $D \cong K(a, b)$. □

4. Megjegyzés. *A $(ii) \Rightarrow (iv)$ irány a Wedderburn-Artin tételből is következik (nem véletlen, hogy nagyon hasonlítanak a bizonyításaik). Ugyanis ha D egyszerű, akkor $\mathrm{Jac}(D) = \{0\}$, hiszen a Jacobson radikál ideál D-ben. Másrészt D nyilván bal-artin, hiszen minden balideál D-ben egy altér, és $\dim_K D = 4 < \infty$. Tehát D féligegyszerű, így a Wedderburn-Artin tétel szerint ferdetestek feletti mátrixgyűrűk direkt összege. Node $Z(D)$ egydimenziós, ezért D nem lehet egynél több mátrixgyűrű direkt összege, azaz vagy egy 1×1-es mátrixgyűrű egy ferdetest felett, vagy $M_2(K)$-val izomorf (másképp nem lehetne 4-dimenziós).*