Algebra4 matematikus szakirány

8. gyakorlat

2013. április 17.

1. Legyen G egy véges csoport. Igazoljuk, hogy a KG csoportalgebra izomorf az $f\colon G \to K$ függvények gyűrűjével, ahol a szorzás a konvolúció: $f_1 * f_2(g) = \sum_{h \in G} f_1(gh^{-1}) f_2(h)$.

2. Melyek azok a véges csoportok, amelyekre a $\mathbb{C}G$ csoportalgebra tartalmaz a) nilpotens balideált; b) nilpotens elemet?

3. Hány ideál van a $\mathbb{C}G$ csoportalgebrában? (G véges csoport.)

4. Határozzuk meg az $\mathbb{F}_3 S_3$ és az $\mathbb{F}_2 S_3$ csoportalgebrák Jacobson radikálját.

5. Rendeljük hozzá minden $n \in \mathbb{Z}$ egész számhoz az $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot. Igazoljuk, hogy ez egy reprezentációja a végtelen ciklikus $\mathbb{Z}$ additív csoportnak. Teljesen reducibilis-e ez a reprezentáció (azaz előáll-e irreducibilisek direkt összegeként)?

6. Hány páronként nemekvivalens ötdimenziós reprezentációja van az S_3 csoportnak?

7. Igazoljuk, hogy ha $g \in G$ másodrendű, és χ egy karaktere G-nek, akkor $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ és $\chi(g)$ paritása megegyezik a χ-hez tartozó reprezentáció dimenziójának paritásával.

8. Legyen $\pi\colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ egy végesdimenziós reprezentációja a G csoportnak. A π *kontragrediens reprezentációja* a $\pi^*\colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ homomorfizmus, melyre $\pi^*(g) = \pi(g^{-1})^T$. Igazoljuk, hogy ez valóban reprezentáció. Mi a karaktere?

9. Hány egydimenziós reprezentációja van egy G csoportnak?