Algebra4 matematikus szakirány

7. gyakorlat

2013. április 10.

1. Igazoljuk, hogy ha R kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor $R[[x]] \cong \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} R[x]/(x^n)$.
2. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}[[x]]/(x-p)$.
3. Igazoljuk, hogy kompakt, Hausdorff topologikus Abel-csoportokon az inverz limesz egzakt. Egy X topologikus tér egy topologikus csoport, ha van rajta a egy $\cdot$ művelet, amire nézve X csoport, és az $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ és az ${}^{-1}\colon X \to X$ leképezések folytonosak.
4. Igazoljuk, hogy $\mathbb{F}_p$ abszolút Galois-csoportja $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p) \cong \hat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n Z_n$, ahol az $f_{nm}\colon Z_m \to Z_n$ összekötő leképezések a Z_m, Z_n ciklikus csoportok között a természetes faktorleképezések (a $Z_n \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ azonosítással) minden $n \mid m$-re.
5. Igazoljuk, hogy a fent definiált $\hat{\mathbb{Z}}$ csoport természetes módon gyűrűvé tehető (vegyük észre, hogy $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ is gyűrű, és $\hat{\mathbb{Z}}$ ezek inverz limesze), és $\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p\in\mathbb{N}\text{ prím}} \mathbb{Z}_p$ (teljes direkt szorzat). (Vö.: kínai maradéktétel.)
6. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\mu_\infty)$ egy végtelen Galois-bővítése $\mathbb{Q}$-nak (az összes $\mathbb{C}$-beli egységgyököt adjungáljuk $\mathbb{Q}$-hoz), és $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_\infty)/\mathbb{Q}) \cong \hat{\mathbb{Z}}^\times$ (azaz a $\hat{\mathbb{Z}}$ gyűrű multiplikatív csoportja). (Mj.: egyébként a Kronecker-Weber tétel szerint ez $\mathbb{Q}$ maximális Abel-féle bővítése.)
7. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Hom}(\varinjlim_i A_i, B) \cong \varprojlim_i \mathrm{Hom}(A_i, B)$, ha A_i, B Abel csoportok ($i \in I$).

Legyen $K(a, b)$ egy kvaternióalgebra a K test felett ($a, b \in K^\times$). Tegyük fel, hogy $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Ekkor a kvadratikus alakok és a szimmetrikus bilineáris függvények $1-1$-értelműen megfeleltethetők egymásnak.

8. Igazoljuk, hogy az $x = \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k \mapsto x^* := \alpha-\beta i-\gamma j-\delta k$ "konjugálás" ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$) egy antiinvolúciója $K(a, b)$-nek, azaz egy olyan K-lineáris transzformáció, melyre $(xy)^* = y^*x^*$.
9. Legyen $\mathrm{Tr}(x) := x + x^* \in K$, és $N(x) := xx^* = x^*x \in K$ (miért is?). Igazoljuk, hogy ha $K(a, b)$ hasadó (azaz $K(a, b) \cong M_2(K)$), akkor Tr a szokásos nyom, N pedig a determináns.
10. Igazoljuk, hogy a norma egy nemelfajuló kvadratikus alak a 4-dimenziós $K(a, b)$ vektortéren. A kvadratikus alak mátrixának determinánsa a szokásos bázisban $a^2b^2 \in (K^\times)^2$ tehát diszkriminánsa 1. (Egy kvadratikus alak diszkriminánsa a mátrixa determinánsának osztálya $K^\times/(K^\times)^2 \cup \{0\}$-ban. Vegyük észre, hogy a determináns itt függ a bázis választásától, de csak nemnulla négyzetelem szorzó erejéig, hiszen ha A a kvadratikus alak mátrixa, S pedig az áttérési mátrix az új bázisra, akkor S^TAS a kvadratikus alak mátrixa az új bázisban, és $\det(S^TAS) = \det A \cdot (\det S)^2$.)

11. Legyen $K(a,b)^0$ a 0 nyomú elemek altere $K(a,b)$-ben. Igazoljuk, hogy $K(a,b)^0$ nem más, mint az i, j, k vektorok által generált altér. Legyen Q egy 1-diszkriminánsú nemelfajuló kvadratikus alak egy 3-dimenziós K-feletti vektortéren. Bizonyítsuk be, hogy izomorfia erejéig pontosan egy olyan $K(a,b)$ kvaternióalgebra van, melyre Q ekvivalens az N normával, mint kvadratikus alakkal a $K(a,b)^0$ 3-dimenziós vektortéren.

12.* Igazoljuk, hogy a p-adikus számok $\mathbb{Q}_p$ teste fölött pontosan egy nem hasadó kvaternióalgebra van izomorfia erejéig.

13.** Igazoljuk, hogy minden p prímszámra létezik izomorfia erejéig pontosan egy olyan $\mathbb{Q}(a,b)$ kvaternióalgebra, melyre $\mathbb{R}(a,b) \cong \mathbb{H}$ és $\mathbb{Q}_p(a,b)$ ferdetestek, viszont minden más $\ell \neq p$ prímszámra $\mathbb{Q}_\ell(a,b) \cong M_2(\mathbb{Q}_\ell)$.

Igaz, de kifejezetten nehéz a következő is: Legyen S egy véges részhalmaza a (pozitív) prímszámok halmazának és az egyelemű $\{\infty\}$ halmaz uniójának. Ha $|S|$ páros, akkor létezik pontosan egy olyan $\mathbb{Q}(a,b)$ kvaternióalgebra, melyre $\mathbb{Q}_p(a,b) \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$ akkor és csak akkor, ha $p \notin S$. (Itt $\mathbb{Q}_\infty$ a valós számok $\mathbb{R}$ testét jelöli.) Ha $|S|$ páratlan (vagy nem véges), akkor nincsen ilyen kvaternióalgebra $\mathbb{Q}$ fölött.