# Algebra4 matematikus szakirány

6. gyakorlat

2013. április 3.

1. Mutassuk meg, hogy minden halmaz partícióhálója komplementumos.
2. Rajzoljuk le az $S_3$, $A_4$ és $Q$ csoportok részcsoporthálóját ($Q$ a kvaterniócsoport), valamint a $D_4$ diédercsoport normálosztóhálóját.
3. Igazoljuk, hogy moduláris háló duálisa is moduláris.
4. Legyen $L$ egy moduláris háló, és $a, b \in L$. Igazoljuk, hogy $[b, a \vee b] \cong [a \wedge b, a]$ izomorf részhálói $L$-nek. (Itt az $[u, v]$ intervallum azon $x \in L$-ekből áll, melyekre $u \leq x \leq v$.)
5. Igazoljuk, hogy minden lánc disztributív háló.
6. Tegyük föl, hogy $I$ ideálja, $F$ pedig filtere az $L$ disztributív hálónak. Legyen $a \equiv b \pmod{\theta_I}$ akkor és csak akkor, ha van olyan $x \in I$, melyre $a \vee x = b \vee x$, és $\rho_F$ a duális módon $F$-hez rendelt reláció.
   (1) Bizonyítsuk be, hogy $\theta_I$ kongruencia, amelynek $I$ osztálya.
   (2) Igazoljuk, hogy ha az $I$ ideál és az $F$ filter olyan, hogy tetszőleges $c \in I$ és $f \in F$ esetén mindig $c \leq f$, akkor $\theta_I \wedge \rho_F = 0_L$ (azaz a triviális kongruencia).
   (3)* Mutassuk meg, hogy az egyetlen szubdirekt irreducibilis disztributív háló a kételemű háló. (Egy $B$ algebra szubdirekt irreducibilis, ha legalább kételemű és tetszőleges $J$ halmazra és $A_j$ ($j \in J$) algebrákra teljesül a következő: Ha $B \leq \prod_{j \in J} A_j$ oly módon, hogy minden $j \in J$ esetén a $\pi_j \colon B \to A_j$ természetes vetítés szürjektív, akkor van olyan $j \in J$, melyre $\pi_j \colon B \to A_j$ izomorfizmus.)
7. (Stone tétele Boole-algebrákra) Egy $L$ disztributív hálót Boole-hálónak nevezünk, ha nulla- és egységelemes, továbbá komplementumos. A Boole-algebrák azok az algebrai struktúrák, melyeknek van két 0-változós művelete (a 0 és az 1 kijelölése), egy egyváltozós művelete ($'$, a komplementumképzés), és két kétváltozós művelete ($\vee$ és $\wedge$), utóbbi kétváltozós műveletekre disztributív hálót alkotnak, és ebben a hálóban 0 a nullelem, 1 az egységelem, és $x'$ az $x$ komplementuma. Igazoljuk, hogy minden Boole-algebra izomorf egy alkalmas halmaz összes részhalmazaiból álló Boole-algebra egy részalgebrájával.
8. Legyen $0, 1 \in L$ egy disztributív háló, és legyen $X$ az $L$ prímideáljainak halmaza. Stone reprezentációs tétele szerint $L$ izomorf $X$ bizonyos részhalmazainak hálójával, mégpedig $a \in L$-hez azon $I \in X$-ek $A(a)$ halmazát rendeljük, melyekre $a \notin I$. Vegyük $X$-en azt a topológiát, amit az $A(a)$ alakú halmazok generálnak, mint bázis (azaz az $A(a)$ halmazok nyíltak). Igazoljuk az alábbiakat
   (a) $X$ a fenti topológiával kompakt.
   (b) Az $A(a) \subset X$ halmazok pontosan az $X$ kompakt-nyílt részhalmazai.

9. Legyen $R$ egy kommutatív, egységelemes gyűrű, legyen $\mathrm{Spec}(R)$ az $R$ prímideáljainak halmaza. Vegyük $\mathrm{Spec}(R)$-en azt a topológiát, amit azon $A(r) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ $(r \in R)$ halmazok, mint bázis-nyíltak generálnak, melyekre $A(r)$ azon $P \lhd R$ prímideálokból áll, melyekre $r \notin P$. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Spec}(R)$ kompakt, és $\mathrm{Spec}(R)$ kompakt-nyílt részhalmazai egy disztributív hálót alkotnak. Minden disztributív háló előáll ilyen alakban, de ez nem feladat.