Algebra4 matematikus szakirány

5. gyakorlat

2013. március 20.

1. Azt mondjuk, hogy egy $\alpha \in \overline{K}$ erős értelemben vett gyökkifejezés, ha $\alpha \in K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ahol minden $i = 1, \dots n$-re α_i minimálpolinomja $K(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$ felett $x^{r_i} - a_i$ alakú. (Vegyük észre, hogy ez – látszólag egy erősebb feltétel, mint az órán tanult $\alpha_i^{r_k} \in K(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$, hiszen ott nem követeltük meg, hogy a minimálpolinom is ilyen alakú legyen.)
   (*a*) Igazoljuk, hogy minden egységgyök erős értelemben vett gyökkifejezés. *Segítség:* Használjunk indukciót ε rendje szerint. Ha ε primitív n-edik egységgyök, akkor először adjungáljuk K-hoz a $\varphi(n)$-edik egységgyököket, melyek az indukciós feltevés szerint erős gyökkifejezések. Majd vegyük észre, hogy $\mathrm{Gal}(K(\mu_{\varphi(n)})(\mu_n)/K(\mu_{\varphi(n)}))$ Abel-csoport, melynek rendje osztója $\varphi(n)$-nek. A véges Abel-csoportok alaptételét használva lássuk be, hogy ez a bővítés radikálbővítések egymásutánja.
   (*b*) Igazoljuk, hogy minden gyökkifejezés erős értelemben is gyökkifejezés.

2. Legyen K egy test, és $L = K(y_1, \dots, y_n)$ az n-változós K feletti racionális törtfüggvények teste. Igazoljuk, hogy az $x^n + y_1 x^{n-1} + \dots + y_n \in L[x]$ polinom irreducibilis, és a felbontási testének a Galois-csoportja S_n. Tehát az általános n-edfokú egyenletre nincsen gyökképlet, ha $n \geq 5$.

---

3. Igazoljuk, hogy ha csak az egységhosszú szakasz adott, akkor $\sqrt[3]{2}$ hosszú szakasz nem szerkeszthető.

4. Adjunk példát olyan $\alpha \in \mathbb{R}$ valós számra, melynek $\mathbb{Q}$ feletti foka 4, de mégsem szerkeszthető. (Az kell, hogy a felbontási test foka már ne legyen 2-hatvány.)

5. Mely n egészekre szerkeszthető n fokos szög?

6. Határozzuk meg $\cos(2\pi/n)$ fokát $\mathbb{Q}$ fölött.

---

7. Mi $1 + \sqrt{2}$ nyoma és normája a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ bővítésben?

8. Vegyük a $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ bővítést. Ennek Galois-csoportja Z_2, speciálisan ciklikus. Mi itt egy $a + bi$ alakú szám normája? Mit mond Hilbert 90-es tétele ebben a speciális esetben a Pitagoraszi számhármasokról?

9. Hilbert 90-es tételének felhasználásával adjunk új bizonyítást arra a tételre, hogy ha K tartalmazza az n-edik egységgyököket, és L/K olyan Galois-bővítés, melyre $\mathrm{Gal}(L/K) \cong Z_n$, akkor L egy radikálbővítése K-nak.

10. Igazoljuk, hogy ha $\alpha \in K$ ($|K : \mathbb{Q}| < \infty$) egy algebrai egész szám, akkor a nyoma $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$ és a normája $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$ egész. *Segítség:* először tegyük fel, hogy $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

11. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ egy irreducibilis normált polinom. Tegyük fel, hogy f $\mathbb{Q}$ feletti felbontási testének Galois-csoportja Abel és $f(\alpha) = 0$ valamilyen $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ számra. Igazoljuk, hogy f összes többi (komplex) gyöke is 1 abszolútértékű.

12.* Igazoljuk, hogy ha α egy olyan algebrai egész szám, melynek az összes Galois-konjugáltja 1 abszolútértékű, akkor α egységgyök.

13.* Igazoljuk, hogy ha $K \leq L \leq M$ véges bővítések lánca, akkor $N_{M/K} = N_{L/K} \circ N_{M/L}$.

14. Legyen L/K egy Galois-bővítés. Ebben a feladatban azt látjuk be, hogy van olyan $\alpha \in L$, melyre $\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)\}$ lineárisan független K felett, azaz L egy bázisát alkotja. Az ilyen bázist normál bázisnak nevezzük.

   (*a*) Legyen $f(x) \in K[x]$ szeparábilis, normált polinom, mely L fölött $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ gyöktényezők szorzatára bomlik. Legyen $g_i(x) := \frac{f(x)}{f'(\alpha_i)(x-\alpha_i)} \in L[x]$. Igazoljuk, hogy (*i*) $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$ („parciális törtekre bontása $1/f(x)$-nek"), és (*ii*) $g_i(x)g_j(x) \equiv \begin{cases} 0 \mod (f(x)) & \text{ha } i \neq j \\ g_i(x) \mod (f(x)) & \text{ha } i = j \end{cases}$.

   (*b*) Legyen L/K Galois-bővítés, mint fent, és α olyan, melyre $L = K(\alpha)$, f pedig α minimálpolinomja. Legyen $\mathrm{Gal}(L/K) = \{\mathrm{id} = \sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ és $\alpha_i = \sigma_i(\alpha) \in L$. Képzzük az $A \in L[x]^{n\times n}$ mátrixot a következőképpen: legyen az i-edik sor j-edik eleme $\sigma_i(\sigma_j(g_1(x))) \in L[x]$. Mutassuk meg (az (*a*) rész segítségével), hogy $A^T A \equiv I \mod (f(x))$ (itt I az egységmátrix).

   (*c*) Tegyük fel, hogy K végtelen. A (*b*) részt felhasználva igazoljuk, hogy van olyan $\beta \in K$, melyre $\det(A(\beta)) = \det(\sigma_i\sigma_j(g_1(\beta)))_{i,j} \neq 0$. Speciálisan a $\gamma = g_1(\beta)$ választással a $\{\sigma_1(\gamma), \ldots, \sigma_n(\gamma)\}$ egy bázisa F-nek, mint K feletti vektortérnek.