Algebra4 matematikus szakirány

4. gyakorlat

2013. március 13.

1. Legyen $G' = [G, G]$ a G kommutátorrészcsoportja, azaz az $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ $(a, b \in G)$ alakú elemek által generált részcsoport G-ben. Mutassuk meg, hogy $G' \lhd G$. Igazoljuk, hogy G'-t az alábbi univerzális tulajdonság karakterizálja: Ha A egy tetszőleges Abel-csoport és $\varphi \colon G \to A$ tetszőleges csoporthomomorfizmus, akkor φ átfaktorizálódik G/G'-n, azaz van olyan $\tilde{\varphi} \colon G/G' \to A$ homomorfizmus, melyre $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$, ahol $\pi \colon G \to G/G'$ a természetes faktorleképezés.

2. Mutassuk meg, hogy egy G véges csoportra az alábbiak ekvivalensek:

   (i) G-nek van olyan normállánca (azaz részcsoportoknak egy $\{1\} = N_0 \lhd N_1 \lhd N_2 \lhd \cdots \lhd N_{k-1} \lhd N_k = G$ sorozata), melyben az N_{i+1}/N_i részfaktorok kommutatívak $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$.

   (ii) Van olyan $l \geq 1$ egész szám, hogy $G^{(l)} = 1$, ahol $G^{(l)}$-t induktívan definiáljuk a következőképpen: $G^{(1)} := [G, G](= G')$ a G *kommutátorrészcsoportja*, és $G^{(l)} = [G^{(l-1)}, G^{(l-1)}]$ ha $l > 1$.

3. Annak felhasználásával, hogy $n \geq 5$ esetén A_n egyszerű, igazoljuk, hogy S_n nem feloldható, ha $n \geq 5$. Mutassuk meg továbbá, hogy S_4 feloldható.

4. Igazoljuk, hogy a feloldható csoportok osztálya zárt a részcsoportképzésre és a faktorcsoportképzésre. Továbbá, ha $N \lhd G$ olyan normálosztó, melyre N és G/N is feloldható, akkor G is feloldható.

---

5. Igazoljuk, hogy ha egy irreducibilis polinom egyik gyöke gyökkifejezés, akkor az összes többi is az.

6. Fejezzük az $\varepsilon = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$ primitív ötödik egységgyököt gyökvonások segítségével. (Segítség: emlékezzünk, hogy $\sqrt{5}$-öt ki tudjuk fejezni ε polinomjaként.)

7. Fejezzük az $\varepsilon = \cos(2\pi/17) + i \sin(2\pi/17)$ primitív tizenhetedik egységgyököt gyökvonások segítségével.

8. Igazoljuk, hogy az $x^n - a \in K[x]$ polinom felbontási testének Galois-csoportja mindig feloldható (függetlenül K karakterisztikájától, és attól, hogy milyen egységgyökök vannak K-ban.

9. (Artin-Schreier) Legyen K egy p karakterisztikájú test, és L egy p-edfokú Galois-bővítése. Igazoljuk, hogy van olyan $\alpha \in L$, melynek minimálpolinomja $x^p - x - a$ alakú valamilyen $a \in K$-ra.

10.* Legyen K egy p-karakterisztikájú test (p prím). Az $f(x) \in K[x]$ polinomot *additív*nak nevezzük, ha az $f(x + y) = f(x) + f(y)$ azonosság teljesül. Igazoljuk, hogy az additív polinomok éppen az $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{p^i}$ alakú polinomok.

11.* Igazoljuk, hogy ha f egy additív polinom, akkor az f gyökei $\overline{K}$-ban részcsoportot alkotnak az összeadásra nézve.

12.* Igazoljuk, hogy a $K[x]$-beli additív polinomok gyűrűt alkotnak a *kompozícióra* nézve. Mi lesz a gyűrű egységeleme? Mely K testek esetén kommutatív ez a gyűrű?

13.* Igazoljuk, hogy az additív polinomok gyűrűje izomorf a $K[\varphi] = \{a_0 + a_1\varphi + \cdots + a_n\varphi^n \mid a_i \in K, i = 0, 1, \ldots, n\}$ ferde polinomgyűrűvel, ahol φ és K elemei nem felcserélhetők, hanem $\varphi \cdot a = \mathrm{Frob}_p(a)\varphi$ minden $a \in K$-ra. (Segítség: φ-nek az x^p additív polinom fog megfelelni.)