Algebra4 matematikus szakirány

1. gyakorlat

2013. február 13.

1. Legyen R egy integritási tartomány, és K egy olyan részgyűrűje R-nek, ami test, és $\dim_K R < \infty$. Igazoljuk, hogy R test.

2. Legyen α páratlan fokú elem egy K test felett. Igazoljuk, hogy $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

3. Legyen $L = K(\alpha, \beta)$, ahol $|K(\alpha) : K| = m$, $|K(\beta) : K| = n$ és $(m, n) = 1$. Igazoljuk, hogy $|K(\alpha, \beta) : K| = mn$. Elhagyható-e az a feltétel, hogy $(m, n) = 1$?

4. Határozzuk meg $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ felett. Mik lesznek $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ résztestei?

5. Legyen α algebrai K felett. Igazoljuk, hogy $K(\alpha)$-nak véges sok K-t tartalmazó részteste van.

6.* Legyen $K \leq L$ egy véges bővítés, melynek csak véges sok közbülső teste van. Tegyük fel továbbá, hogy $|K| = \infty$. Igazoljuk, hogy $L = K(\alpha)$ valamilyen $\alpha \in L$-re. (Az állítás igaz véges testekre is.)

---

7. Legyen $K \leq L$ egy testbővítés, és $\alpha, \beta \in L$ transzcendens elemek K felett. Igazoljuk, hogy α pontosan akkor algebrai $K(\beta)$ felett, ha β algebrai $K(\alpha)$ felett.

8.* Legyen $K(x)$ a racionális törtfüggvények teste (azaz $K[x]$ hányadosteste) a K test felett. Igazoljuk, hogy minden $K < L < K(x)$ valódi közbülső testre létezik olyan $g(x) \in K(x)$ racionális törtfüggvény, melyre $L = K(g(x))$.

---

9. Hány eleműek az alábbi halmazok? (Itt $K \leq L_1$, $K \leq L_2$ esetén $\mathrm{Hom}_K(L_1, L_2)$ azon $\tau\colon L_1 \to L_2$ testhomomorfizmusok halmazát jelöli, melyekre $\tau_K = \mathrm{id}_K$.)

   (a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}))$;

   (b) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{C})$;

   (c) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$;

   (d) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{C})$;

   (e) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{R})$;

   (f) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$;

   (g) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$;

   (h) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

10. (a) Igazoljuk, hogy ha L egy algebrai bővítése K-nak és $\tau\colon L \to L$ egy K-homomorfizmus, akkor τ bijektív. Először lássuk be véges bővítésekre.

   (b) Igaz marad-e az állítás, ha nem tesszük fel L-ről, hogy algebrai?

11. Legyenek $K \leq L_1$ és $K \leq L_2$ véges bővítések. Igazoljuk, hogy $L_1 \otimes_K L_2$ az $(a_1 \otimes a_2) \cdot (b_1 \otimes b_2) := (a_1 b_1) \otimes (a_2 b_2)$ szorzással ($a_i, b_i \in L_i$ $(i = 1, 2)$, a szorzást kiterjesztjük a disztributivitás segítségével az elemi tenzorokról az egész tenzorszorzatra) egy kommutatív egységelemes gyűrű lesz, melynek az $a_1 \otimes 1$ alakú elemei egy L_1-gyel, az $1 \otimes a_2$ alakú elemei egy L_2-vel izomorf résztestét alkotják.

12. Bizonyítsuk be, hogy ha L_1/K egy véges szeparábilis bővítés, akkor $L_1 \otimes_K L_2$ egy féligegyszerű gyűrű. Bontsuk testek direkt szorzatára $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$-t, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$-t, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$-t, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$-et és $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$-t.

---

13. Adjunk példát olyan p-karakterisztikájú testre, amelyen Frob_p nem szürjektív.

14. Adjunk példát olyan $K \leq L$ *véges* bővítésre, melyre nincs olyan $\alpha \in L$, amire $L = K(\alpha)$.

15. Legyen $K \leq L$ p-karakterisztikájú testeknek egy véges bővítése. Igazoljuk, hogy minden $\alpha \in L$-re van olyan $n \geq 0$, melyre α^{p^n} szeparábilis K felett.

16. Legyen L/K egy algebrai bővítése p-karakterisztikájú testeknek. Azt mondjuk, hogy L/K tisztán inszeparábilis, ha L minden K felett szeparábilis eleme K-ban van. Egy $\alpha \in L$-ről azt mondjuk, hogy tisztán inszeparábilis, ha $K(\alpha)/K$ tisztán inszeparábilis. Igazoljuk, hogy α pontosan akkor tisztán inszeparábilis, ha minimálpolinomja $x^{p^n} - a$ alakú ($a \in K$).

17. Igazoljuk, hogy egy L/K algebrai bővítésben a tisztán inszeparábilis elemek (egy K-t tartalmazó) résztestet alkotnak.

18. Legyen $L = \mathbb{F}_p(x, y)$, $K = \mathbb{F}_p(x^p, y^p - y - x)$ (x, y független változók). Bizonyítsuk be, hogy $|L : K| = p^2$ és határozzuk meg az L/K bővítés maximális szeparábilis résztestét.

19. Legyen $L = \mathbb{F}_p(x, y)$ mint előbb és $M = L(\alpha)$, ahol $\alpha^{p^2} = x\alpha^p + xy$. Bizonyítsuk be, hogy $|M : L| = p^2$ és M/L inszeparábilis. Viszont M/L L felett tisztán inszeparábilis elemei csak L elemei.