Vizsgatémakörök (Algebra3 Matematikus)

A szóbeli vizsgán mindenki egy témakört kap az alábbiak közül (sorsolás után), amiből kérdezek. Fontos, hogy mindent értsetek (bizonyításokat is), tudjatok példákat és ellenpéldákat mondani, tudjátok, hogy melyik lemma min múlik és a tételekhez hogy (és melyik lépésben) használtuk őket, ill. a tétel feltételeit. Felkészülési idő nincs, viszont a saját jegyzeteiteket végig használhatjátok (arra persze nincs idő, hogy ott helyben értsetek meg valamit, de tényszerű dolgokat ki szabad puskázni). Egy vizsgázóra 20 perc jut átlagosan.

Ha pl. valaki az alábbi 5. témakört kapja, akkor (a válaszaitól függően) az alábbi kérdéseket kaphatja tőlem szóban (ebben a sorrendben, egyszerre csak egyet):

Definiáld a feloldható csoport fogalmát. Mondjál példát feloldható csoportra. Na jó, akkor mondjál egy nemkommutatívat. Az S_4 feloldható? Adj meg egy normálláncot, amiben a részfaktorok Abelek. Mondj egy ekvivalens jellemzést a feloldhatóságra. Mi az a kommutátorrészcsoport? Miért ez a legnagyobb Abel faktorcsoport? Van legnagyobb Abel részcsoport is? És a centrum? Mondjál példát nem feloldható csoportra. A_n egyszerűségének a bizonyításánál mik a főbb lépések? Hol használjuk ki, hogy n legalább 5? Miért konjugált bármely két hármasciklus?

1. Példák csoportokra, részcsoportok, generált részcsoport, Lagrange-tétel, permutációcsoportok, pálya-stabilizátor lemma, Cayley tétele csoportokra.
2. Csoport-, gyűrű-, és modulushomomorfizmusok, normálosztó, ideál. A homomorfizmus tétel és az izomorfizmus tételek csoportokra, gyűrűkre és modulusokra.
3. Cauchy tétele, kettős mellékosztályok, Sylow-tételek, lemmák.
4. Szemidirekt szorzat. Normállánc, egyszerű csoport, kompozíciólánc, Jordan–Hölder tétel.
5. Centrum, kommutátor, feloldható csoportok ekvivalens jellemzései, p-csoportok, A_n egyszerű ($n \geq 5$).
6. Szabad csoport, szabad modulus: létezésük, konstrukciójuk, egyértelműség. Csoport/modulus előállítása szabadnak a faktoraként, csoport megadása generátorokkal és definiáló relációkkal.
7. Gyűrűk, ideálok, elem/részhalmaz annullátora. Zorn lemma, Krull tétele. A maximum és minimum feltétel gyűrűk ideáljaira, ekvivalens jellemzések. Hilbert bázistétele.
8. Számelmélet gyűrűkben (alaptételes gyűrű, euklideszi gyűrű, főideálgyűrű, implikációk, ellenpéldák, ekvivalens jellemzés alaptételes gyűrűkre). Az Euler-egészek számelmélete (egyértelmű prímfaktorizáció, egységek, prímek, alkalmazás a Fermat-sejtés $n = 3$ esetére).
9. Hányadostest, karakterisztika, prímtest. Főideálgyűrű feletti modulusok: kínai maradéktétel, alaptétel, alkalmazás a Jordan-féle normálalakra és a véges Abel-csoportok alaptételére.
10. Homologikus algebra elemei: egzakt sorozatok, kommutatív diagramok. Diagramvadászat: 5-lemma, $\mathrm{Hom}_R(M, \cdot)$ balegzakt, ekvivalens feltétel a jobbegzaktságra.
11. Projektív- és injektív modulusok. A tenzorszorzat: konstrukció, univerzális tulajdonság, kapcsolat a Hom-mal, példák.