Algebra3 matematikus szakirány

Zárthelyi dolgozat – megoldások

2022. november 17.

1. $105 = 3\cdot 5\cdot 7 = -(\sqrt{-3})^2\cdot 5\cdot(2+\sqrt{-3})(2-\sqrt{-3})$. A $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(105)$ maximális ideáljai a 105 prímosztóinak felelnek meg asszociáltság erejéig, tehát összesen 4 db van belőlük: $(\sqrt{-3})$, (5), $(2+\sqrt{-3})$, $(2-\sqrt{-3})$. Ezek mind különbözőek (az utolsó két maximális ideálnál használhatjuk a 7. feladatsor 9. feladatát).

2. $C_2\times C_2$-ben minden elem négyzete az egységelem, tehát minden ilyen részcsoportot tartalmaz a $C_4\times C_6\times C_8\times C_3\times C_5$ csoport 2-torzió részcsoportja, azaz azon elemek részcsoportja, melyek rendje osztója a 2-nek. Node ez a részcsoport $C_4\times C_6\times C_8\times C_3\times C_5[2]\cong C_2\times C_2\times C_2$, hiszen C_n-ben egyetlen másodrendű elem van, ha n páros, ha pedig n páratlan, akkor egy sem. Tehát a kérdés az, hogy az $\mathbb{F}_2$ fölötti háromdimenziós vektortérben hány kétdimenziós altér van. A kétdimenziós altér első bázisvektorát $2^3-1=7$-féleképpen választjatjuk, a második bázisvektort pedig $2^3-2=6$-féleképpen (nem lehet az első bázisvektor és a nullvektor). Így minden kétdimenziós alteret $3\cdot 2=6$-szor számoltunk, hiszen minden kétdimenziós altérnek ennyi bázisa van: az első bázisvektor tetszőleges nemnulla vektor lehet az altérben, a második pedig a 0-tál és az első bázisvektortól különbözik). A válasz tehát $\frac{7\cdot 6}{6}=7$.

3. Válasz: 8 elemű, ez a csoport izomorf a Q kvaterniócsoporttal. Legyen $G=\langle a,b\mid a^4=1, b^2=a^2, aba^{-1}=b^{-1}\rangle$. Ekkor G minden eleme b^ja^k alakba írható, ahol $0\le j\le 1$ és $0\le j\le 4$: valóban, mindkét generátor negyedik hatványa 1 ($b^4=(b^2)^2=(a^2)^2)=a^4=1$ és ha egy a-kból és b-kből álló szóban egy a megelőz (balról) egy b-t, akkor az $ab=b^{-1}a=b^3a$ azonosság használatával átírhatjuk úgy, hogy az kerül hátrébb. Sőt, $b^2=a^2$ miatt ha b legalább második hatványon van, akkor b^2-et a^2-re cserélhetjük. Speciálisan $|G|\le 8$. Másrészt a Q kvaterniócsoportban $a\mapsto i$, $b\mapsto j$ választással teljesülnek ezek a relációk, hiszen $i^4=1$, $i^2=j^2=-1$ és $iji^{-1}=k(-i)=-j=j^{-1}$. Speciálisan létezik egy $G\to Q$ csoporthomomorfizmus, mely szürjektív, hiszen i és j generálja Q-t. Így $|G|\ge 8$ is teljesül, azaz $|G|=8$ (és $G\cong Q$).

4. Volt előadáson, hogy $|G|=48$, ezért van benne 3-adrendű elem. Ezt a harmadrendű elemet az általa generált részcsoport és a középpontos tükrözés nyilván centralizálja, tehát az általuk generált 6-odrendű részcsoport is, azaz $6\le|C_G(g)|$. Belátjuk, hogy nincs más elem a centralizátorban. Egyrészt $\langle g\rangle$ hatása szerint a kocka csúcsainak a pályái 1 vagy 3 eleműek lehetnek, tehát mindenképp lennie kell egy A fixpontnak (hiszen 8 csúcs van és $3\nmid 8$). Nyilván a fixponttal átellenes B csúcs is fixpont lesz, más fixpontja viszont nincs g-nek. Ha $gh=hg$ valamely $h\in G$ csoportelemre, akkor $gh(A)=hg(A)=h(A)$, azaz $h(A)$ is fixpontja g-nek, azaz $h(A)=A$ vagy B. Tehát h benne van az $\{A,B\}$ halmaz $\mathrm{Stab}_G(\{A,B\})$ stabilizátorában, azaz $C_G(g)\le\mathrm{Stab}_G(\{A,B\})$. Mivel A pályája $\mathrm{Stab}_G(\{A,B\})$ hatása szerint kételemű ($\{A,B\}$), ezért $|\mathrm{Stab}_G(\{A,B\})|=2|\mathrm{Stab}_G(A)|=12$. Viszont $\mathrm{Stab}_G(\{A,B\})$-ban van olyan elem, ami *nem* centralizálja g-t, jelesül az egyik síkra való s tükrözés, mely A-t, B-t és 1-1 szomszédos csúcsot stabilizál: ez az elem épp az inverzébe konjugálja g-t. Tehát $6\le|C_G(g)|$ osztója a 12-nek, de 12-nél kisebb, így $|C_G(g)|=6$. Speciálisan g és g^{-1} konjugáltak. Ha $g_1\in G$ egy másik harmadrendű elem, akkor $\langle g\rangle$ és $\langle g_1\rangle$ egyaránt 3-Sylowjai G-nek, ezért a 2. Sylow-tétel szerint van olyan $h_1\in G$, amire $h_1\langle g_1\rangle h_1^{-1}=\langle g\rangle$. Viszont ekkor $h_1g_1h_1^{-1}$ vagy g-vel vagy g^{-1}-zel egyenlő, hiszen csak ez a két egységelemtől különböző elem van $\langle g\rangle$-ben. Ha $h_1g_1h_1^{-1}=g$, akkor kész is vagyunk, ha pedig $h_1g_1h_1^{-1}=g^{-1}$, akkor $(sh_1)g_1(sh_1)^{-1}=sg^{-1}s^{-1}=g$, azaz g_1 és g konjugáltak. Megjegyzés: A Sylow-tétel nélkül is célba érhetünk, ha megállapítjuk, hogy g konjugáltosztálya $|G\colon C_G(g)|=8$ elemű és pont ennyi harmadrendű elem van G-ben.

5. A sakktábla szimmetriái nem mások, mint a négyzet szimmetriái, azaz a D_4 csoport. Tehát a D_4 csoport hat a színezések halmazán és a kérdés a pályák száma ennél a hatásnál. A Burnside

lemma miatt ez megegyezik a fixpontok átlagos számával. Az identitásnak $\binom{25}{2} = 300$ fixpontja van (minden színezés fixpont). A középpontos tükrözésnek 12 színezés a fixpontja, hiszen ennyi átellenes pár van a mezők között (a középső mező nem lehet színezve). A $\pm 90°$-os forgatás esetében nincs olyan színezés, ami fixpont, hiszen a középső mező kivételével minden mező pályája 4 hosszú a forgatás által generált részcsoport szerint és ezeknek egyszínűnek kellene lenni. Végezetül egy (akár oldalfelezőre, akár átlóra való) tükrözésnél kétféle színezés van, ami helyben marad: vagy mindkét fekete mező a szimmetritengelyen van (ilyenből $\binom{5}{2}$ van, hiszen 5 mező van a szimmetriatengelyen), vagy a maradék 20 mező közül egy átellenes pár fekete: ilyenből is 10 darab van. Tehát a fixpontok átlagos száma

$$\frac{300 + 12 + 0 + 0 + 4 \cdot 20}{8} = 49 \; .$$

6. G hat a H-szerinti baloldali mellékosztályokon a balszorzással, ami megad egy $\varphi\colon G \to S_n$ csoporthomomorfizmust. Ez nem az azonosan 1, ezért magja nem az egész G. Viszont G egyszerű, ezért $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1\}$ lehet csak, azaz φ injektív. Viszont $\mathrm{Im}(\varphi)$-ben normálosztó $A_n \cap \mathrm{Im}(\varphi)$, melynek indexe legfeljebb 2 (pl. az 1. izomorfizmus tétel miatt: $\mathrm{Im}(\varphi)/\mathrm{Im}(\varphi) \cap A_n \cong \mathrm{Im}(\varphi)A_n/A_n \leq S_n/A_n \cong C_2$). Viszont G-vel együtt $\mathrm{Im}(\varphi)$ is egyszerű, tehát az index nem lehet 2, így $\mathrm{Im}(\varphi) \leq A_n$. Tehát a Lagrange-tétel miatt $|G| = |\mathrm{Im}(\varphi)|$ osztója $|A_n| = \frac{n!}{2}$-nek.

7. Először is feltehetjük, hogy $n = |G|$, hiszen $\mathrm{GL}_{|G|}(K)$ részcsoport $\mathrm{GL}_n(K)$-ban (sőt, ez igaz a felsőháromszög-mátrixok csoportjára is). Az $a)$ részhez vegyük észre, hogy G hat saját magán a balszorzással (Cayley-tétel) és vehetjük az ennek megfelelő permutációmátrixokat: az n-dimenziós vektortér bázisvektorait indexeljük meg a csoportelemekkel (azaz $\{e_g \mid g \in G\}$ legyen a bázis) és egy $h \in G$-hez rendeljük hozzá azt a permutációmátrixot, ami az e_g bázisvektort e_{hg}-be küldi (minden $g \in G$-re). Ez megad egy injektív $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}_n(K)$ csoporthomomorfizmust, azaz $G \cong \mathrm{Im}(\varphi) \leq \mathrm{GL}_n(K)$. A $b)$ részhez tegyük fel, hogy $n = p^k$ és $K = \mathbb{F}_p$. Először belátjuk, hogy azon felsőháromszögmátrixok U csoportja, melyeknek főátlójában 1-esek vannak a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ csoport egy p-Sylow részcsoportját alkotják. U rendje ugyanis $p^{\binom{n}{2}}$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ rendje pedig $(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$, melynek legnagyobb p-hatvány osztója épp $p \cdot p^2 \cdots p^{n-1} = p^{\binom{n}{2}}$. Na most ha $G \cong \mathrm{Im}(\varphi)$ egy p-csoport és $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ részcsoportja, akkor az 1. Sylow-tétel miatt $\mathrm{Im}(\varphi)$ benne van $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ egy P p-Sylowjában, és a 2. Sylow-tétel miatt van olyan $s \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, melyre $sPs^{-1} = U$, azaz $G \cong s\,\mathrm{Im}(\varphi)s^{-1} \leq U$, azaz G izomorf U egy részcsoportjával.