Algebra3 matematikus szakirány

Zárthelyi dolgozat

2022. november 17.

Minden feladat 10 pontot ér, a dolgozatra csak pontszámot adok, jegyet nem. Az elégségeshez a dolgozatból legalább 10 pontot és a házi feladatokkal együtt legalább 40 pontot kell elérni. A házi feladatokkal együtt 100 ponttól a gyakorlati jegy biztosan jeles (5), 80 ponttól biztosan legalább jó (4), 60 ponttól biztosan legalább közepes (3). 115 perc van a megoldásra.

1. Bontsuk prímtényezők szorzatára a 105-öt az Euler-egészek körében és határozzuk meg a $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(105)$ gyűrű összes maximális ideálját, ahol ε egy primitív harmadik egységgyök (azaz $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ az Euler-egészek gyűrűje).

2. Hány $C_2 \times C_2$-vel izomorf részcsoport van a $C_4 \times C_6 \times C_8 \times C_3 \times C_5$ csoportban? (Itt C_n az n-edrendű ciklikus csoportot jelöli, ha $n \geq 1$ egész.)

3. Hány elemű az $\langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$ generátorokkal és relációkkal megadott csoport?

4. Legyen G a kocka szimmetriacsoportja, $g \in G$ pedig egy tetszőleges harmadrendű elem. Hány elemű g centralizátora G-ben? Igazoljuk, hogy G-ben bármely két harmadrendű elem konjugált.

5. Egy 5×5-ös sakktáblán két mezőt feketére színezünk, a többi 23 pedig fehér. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha a sakktábla szimmetriáival egymásbavihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek?

6. Legyen G egy véges egyszerű csoport és $H \leq G$ egy részcsoport, melynek indexe $n = |G : H| > 1$. Igazoljuk, hogy G rendje osztója $\frac{n!}{2}$-nek.

7. Legyen G véges csoport, $n \geq |G|$, p prím, K tetszőleges test.

   a) (5 pont) Igazoljuk, hogy ha $n \geq |G|$, akkor G izomorf a K-együtthatós $n \times n$-es invertálható mátrixok $\mathrm{GL}_n(K)$ szorzáscsoportjának egy alkalmas részcsoportjával.

   b) (5 pont) Tegyük fel továbbá, hogy G egy p-csoport (azaz $|G|$ p-hatvány) és $K = \mathbb{F}_p$. Mutassuk meg, hogy ekkor G izomorf az invertálható *felsőháromszög-mátrixok* csoportjának egy alkalmas részcsoportjával is.

   (A *b*) rész megoldásában szabad használni az *a*) részt akkor is, ha az nincs meg.)