Algebra3 matematikus szakirány

10-12. gyakorlat

2022. november 25–december 9.

1. (beadandó dec. 2-ig, 7 pont) Írjuk fel ciklikus csoportok direkt szorzataként a modulo 16 *redukált* maradékosztályok multiplikatív csoportját. Határozzuk meg a generátorokat is.

---

2. Igazoljuk az 5-lemma másik állítását, azaz ha f_2, f_4 epi és f_5 mono, akkor f_3 epi.

3. Legyen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ R-modulusoknak egy egzakt sorozata, M pedig egy tetszőleges R-modulus. Bizonyítsuk be, hogy a
$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, M)$$
sorozat is egzakt, ahol $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(C, M)$ esetén $g^*(\gamma) = \gamma \circ g$ és $\beta \in \mathrm{Hom}_R(B, M)$ esetén $f^*(\beta) = \beta \circ f$.

4. (beadandó dec. 9-ig, 10 pont(!)) Kígyó lemma:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1}$$
A fenti kommutatív diagramban a két vízszintes sor egzakt. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a
$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma) \to 0$$
sorozat is egzakt, ahol $\varphi\colon X \to Y$ (modulus)homomorfizmusra $\mathrm{Coker}(\varphi) := Y/\mathrm{Im}(\varphi)$ a φ *komag*ja. A fenti sorozatban minden leképezést az (1) diagram soraiban levő leképezések indukálnak, kivéve δ-t, melynek megkonstruálása a feladat része.

5. Legyen $0 \to Z_2 \to Z_4 \to Z_2 \to 0$ $\mathbb{Z}$-modulusoknak rövid egzakt sorozata. Széteső-e ez a sorozat?

6. Van-e olyan $0 \to Z_2 \to Z_2 \oplus Z_2 \to Z_2 \to 0$ rövid egzakt sorozat, ami nem széteső?

7. Legyen R integritási tartomány, M egy R-modulus, $m \in M$. Azt mondjuk, hogy m *torzióelem*, ha $\mathrm{Ann}_R(m) \neq \{0\}$. Jelölje T a torzióelemek halmazát. M-et *torziómentes* modulusnak nevezzük, ha $T = \{0\}$, *torziómodulus*nak, ha $T = M$. Igazoljuk, hogy T részmodulusa M-nek, és hogy M/T torziómentes.

8. Bizonyítsuk be, hogy integritási tartomány felett minden projektív modulus torziómentes.

9. Igazoljuk, hogy ha A torziómentes Abel-csoport, D pedig osztható Abel-csoport, akkor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ osztható Abel-csoport.

10. Bizonyítsuk be, hogy az M R-modulus akkor és csak akkor injektív, ha minden $L \lhd_b R$ balideálhoz és minden $f\colon K \to M$ (modulus) homomorfizmushoz van olyan $g\colon R \to M$ (modulus) homomorfizmus, melyre $g_{|L} = f$.

---

11. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = 0$.

12. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(m, n)\mathbb{Z}$.

13. Bizonyítsuk be, hogy ha T torzió-, D pedig osztható Abel-csoport, akkor $D \otimes_{\mathbb{Z}} T = 0$.

14. Igazoljuk, hogy $R \otimes_R M \cong M$, ha M egy bal R modulus.

15. Igazoljuk, hogy ha V és W végesdimenziós vektorterek a K test fölött, akkor $\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K V \dim_K W$.

16. Legyen R egy kommutatív gyűrű, M, N, K tetszőleges R-modulusok. Igazoljuk az alábbi izomorfizmusokat.
    (a) $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$.
    (b) $(M \otimes_R N) \otimes_R K \cong M \otimes_R (N \otimes_R K)$.
    (c) $(M \oplus N) \otimes_R K \cong (M \otimes_R K) \oplus (N \otimes_R K)$. Igaz marad az állítás végtelen sok tényezős direkt összegre? És direkt szorzatra?

17. Igazoljuk, hogy ha P projektív R-modulus, akkor a P-vel való tenzorszorzás egzakt, azaz rövid egzakt sorozatot rövid egzaktba visz. Az olyan modulusokat, melyekkel való tenzorszorzás egzakt, *lapos* modulusoknak nevezzük.

Nehezebb feladatok

18. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$-t (1 determinánsú, egész együtthatós $n \times n$-es mátrixok) generálják az $I + E_{ij}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) alakú csoportelemek, ahol I az egységmátrix, E_{ij} pedig az a mátrix, aminek i-edik sorának j-edik eleme 1, a többi pedig 0.

19. Igazoljuk, hogy a kanonikus $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$ csoporthomomorfizmus (redukálunk mod p) szürjektív.

20. Igazoljuk, hogy (kommutatív) lokális gyűrű fölött minden végesen generált projektív modulus szabad. (Az állítás igaz nem feltétlenül végesen generált projektív modulusokra is.)

21. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ lapos $\mathbb{Z}$-modulus, de nem projektív.

22. Igazoljuk, hogy egy Abel-csoport pontosan akkor lapos, ha torziómentes.

23.** Legyen R egy noether-féle integritási tartomány és M egy végesen generált R-modulus. Igazoljuk, hogy M akkor és csak akkor lapos, ha projektív.