Algebra3 matematikus szakirány

8. gyakorlat

2022. november 11.

1. (beadandó HF 7 pont) Igazoljuk, hogy az R kommutatív egységelemes gyűrű akkor és csak akkor *lokális* (azaz egyetlen maximális ideálja van), ha a nem invertálható elemei ideált alkotnak.

2. Az alábbi gyűrűkről igazoljuk, hogy lokálisak:

   a) $K[\![x]\!]$ test feletti formális hatványsorgyűrű;

   b) $R[\![x]\!]$, ha R lokális gyűrű;

   c) $\mathbb{Z}_{(p)} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\} \subset \mathbb{Q}$;

   d) X egy topologikus tér, $x \in X$ és C^0_x az x-beli folytonos függvénycsírák gyűrűje (a pontonkénti összeadásra és szorzásra), azaz az $f\colon U \to \mathbb{R}$ folytonos függvények ekvivalenciaosztályai, ahol $U \subseteq X$ egy x-et tartalmazó nyílt részhalmaz és az $f\colon U \to \mathbb{R}$ ekvivalens a $g\colon V \to \mathbb{R}$ függvénnyel, ha van olyan $W \subseteq U \cap V$ x-et tartalmazó nyílt részhalmaz, melyen f és g megegyezeik, azaz $f_{|W} = g_{|W}$.

   e)* Az origó körüli holomorf függvénycsírák, azaz $C^{an}(\mathbb{C}, 0) := \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{C}, \exists r > 0\colon \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\}$.

3. Legyen R kommutatív egységelemes gyűrű, $P \lhd R$ *prímideál* (azaz $ab \in P$ esetén $a \in P$ vagy $b \in P$) és $S := R \setminus P$. Igazoljuk, hogy a hányadostest mintájára legyártott

$$R_P := R[S^{-1}] := R \times S/\sim$$
$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists u \in S\colon atu = bsu$$

   halmaz valóban gyűrű, sőt, lokális gyűrű. Ezt nevezzük az R P-nél vett *lokalizált*jának.

4. Legyen $R = \mathbb{C}[x, y]/(xy)$ (azaz az xy elem által generált ideál szerinti faktorgyűrű) és $P = (y) \lhd R$ az y (mellékosztálya) által generált ideál. Igazoljuk, hogy P prímideál. Nullosztómentes-e az R_P lokalizált? Test-e? Mi a

$$\begin{array}{rcl} R & \to & R_P \\ R \ni r & \mapsto & \dfrac{r}{1} = [(r, 1)] \end{array}$$

   gyűrűhomomorfizmus magja?

---

5. Legyen M egy modulus az $1 \in R$ gyűrű fölött, és $X \subseteq M$. Igazoljuk, hogy az X által generált részmodulus M-ben nem más, mint $\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R, x_i \in X, n \geq 0\}$.

6. Igazoljuk, hogy ha $S \leq R$ egységelemes részgyűrű az R egységelemes gyűrűben, akkor R egy S-modulus az R-beli szorzással és összeadással.

7. Legyen V vektortér a K test fölött, és $\varphi\colon V \to V$ lineáris leképezés. Ekkor V modulus $K[x]$ felett az $f(x)v := f(\varphi)(v)$ szorzással. Bizonyítsuk be, hogy V részmodulusai éppen a φ-invariáns alterek V-ben.

8. Igazoljuk, hogy ferdetest fölött minden (végesen generált) modulus szabad, azaz minden (végesen generált) modulusnak van bázisa. Mutassuk meg, hogy a bázis elemszáma is egyértelmű.

---

9. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy négyzetes mátrix és legyen $M = \mathbb{C}^n$ az a $\mathbb{C}[x]$-modulus, melyen az x az A-val szorzáson (mint lineáris leképezésen) keresztül hat. Legyen továbbá N az a részmodulusa a $\mathbb{C}[x]^n$ szabad n-rangú $\mathbb{C}[x]$-modulusnak, amit az $A - xI$ karakterisztikus mátrix oszlopvektorai (mint $\mathbb{C}[x]^n$ elemei) generálnak (itt I az egységmátrix). Igazoljuk, hogy $M \cong \mathbb{C}[x]^n/N$.

10. Állítsuk elő az alábbi mátrixokhoz tartozó $\mathbb{C}[x]$-modulusokat ciklikusak direkt összegeként és határozzuk meg a mátrixok Jordan-féle normálalakját. Hogy lehet a bázist meghatározni, amiben a mátrix Jordan-alakú?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

11. Legyen M egy bal R-modulus. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Hom}_R({}_RR, M) \cong M$ (kommutatív R esetén mint R-modulusok, egyébként mint Abel-csoportok).

12. Legyen M egy bal R-modulus. Tegyük jobb R-modulussá $\mathrm{Hom}_R(M, {}_RR)$-et. Igaz-e mindig, hogy $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, {}_RR), R_R) \cong M$?

13. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}$.