Algebra3 matematikus szakirány

7. gyakorlat

2022. október 28.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha R kommutatív gyűrű, és $R[x]$ noether, akkor R is az.
2. Igazoljuk, hogy minden végesen generált csoportnak van maximális részcsoportja, de a racionális számok additív csoportjának nincs.

---

3. Igazoljuk, hogy az R integritási tartomány $p \neq 0$ eleme pontosan akkor prím, ha $R/(p)$ nullosztómentes. Adjunk példát (alkalmas R-ben) olyan p prímre, amikor ez a gyűrű nem test.
4. Van-e $\mathbb{Z}[x]$-ben olyan ideál, ami nem generálható 1000 elemmel?
5. Legyen $d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes ($d \neq 0, 1$). Határozzuk meg a $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrű invertálható elemeinek (azaz *egységeinek*) a csoportját. (Ha $d > 0$, akkor $*$-os, azaz beadható.)
6. Igazoljuk, hogy az a) Gauß-egészek $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűjében $b)^*$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ $c)^*$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ gyűrűben egyértelmű a prímfaktorizáció.
7. A Gauß-egészek $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűjében mik a prímek?

---

8. A kvadratikus reciprocitás felhasználásával adjunk új bizonyítást az $x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia megoldhatóságát jellemző tételre (p pozitív prím).
9. Bizonyítsuk be, hogy ha $\pi\overline{\pi} = q \equiv 1 \pmod{3}$, ahol π Euler-prím, q pedig közönséges prím, akkor π és $\overline{\pi}$ nem asszociáltak.
10. (beadandó HF 7 pont) Igazoljuk, hogy ha α Euler-egész és π Euler-prím, akkor $\pi \mid \alpha^{N(\pi)} - \alpha$.
11. Mely n-ekre oldható meg az $x^2 + 3y^2 = n$ diofantikus egyenlet? *Hány megoldás van?
12. Legyen $d \neq 0, 1$ négyzetmentes egész és $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ az $a + b\sqrt{d}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) alakú számok teste. $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nek mely elemei lesznek gyökei egy egész együtthatós normált polinomnak?

Nehezebb feladatok

13. Adjunk példát olyan integritási tartományra, melyben a főideálokra teljesül a maximum-feltétel, de tetszőleges ideálokra nem.
14. Igazoljuk, hogy ha R (kommutatív) noether gyűrű, akkor a formális hatványsorok $R[[x]]$ gyűrűje is noether.
15. Oldjuk meg az $x^2 + 243 = y^3$ diofantikus egyenletet.