Algebra3 matematikus szakirány

6. gyakorlat

2022. október 21.

1. (beadandó HF: g), h), k), n)) Az alábbi, generátorokkal és definiáló relációkkal megadott csoportoknak határozzuk meg a rendjeit. Melyek izomorfak egy korábbról már ismert csoporttal?
   (a) $\langle a \mid a^2 = 1 \rangle$.
   (b) $\langle a \mid a^3 = 1 \rangle$.
   (c) $\langle a \mid a^5 = 1, a^7 = 1 \rangle$.
   (d) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba \rangle$.
   (e) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = 1, ab = ba \rangle$.
   (f) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^7 = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$.
   (g) (1 pont) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^7 = 1, aba^{-1} = b^2 \rangle$.
   (h) (2 pont) $\langle a, b \mid a^3 = 1, b^7 = 1, aba^{-1} = b^2 \rangle$.
   (i) $\langle a, b \mid a^6 = 1, b^2 = a^3, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.
   (j) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^3 = 1 \rangle$.
   (k) (1 pont) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^n = 1 \rangle$ (ahol $n \geq 3$).
   (l) $\langle a, b \mid a^3 = 1, b^2 = 1, (ab)^3 = 1 \rangle$.
   (m) $\langle a, b \mid a^3 = 1, b^2 = 1, (ab)^4 = 1 \rangle$.
   (n) (3 pont) $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = 1, ab = ba, cac^{-1} = b \rangle$.
2. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Aut}(D_4) \cong D_4$.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha F szabad csoport, akkor bárhogy is veszünk egy $\alpha\colon G \twoheadrightarrow H$ szürjektív csoporthomomorfizmust, az F csoport minden H-ba menő φ homomorfizmusa „keresztülvezethető” az α leképezésen, azaz van olyan $\psi\colon F \to G$ homomorfizmus, hogy $\varphi = \alpha \circ \psi$.
4. Mutassuk meg, hogy ha egy szabad csoportban X és Y is szabad generátorrendszer, akkor X és Y elemszáma megegyezik.

---

5. Határozzuk meg az összes olyan gyűrűt, melynek additív csoportja $(\mathbb{Z}, +)$.
6. Igazoljuk az alábbiakat: Az $a \in R$ elem által *generált balideál* $(a)_b = \{na + ra \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$, egységelemes gyűrűben $(a)_b = \{ra \mid r \in R\} = Ra$ (mivel leginkább egységelemes gyűrűkkel foglalkozunk, ezért az utóbbi jelölést fogjuk használni). Az $a \in R$ elem által *generált ideál* $(a) = \{na + ra + as + \sum_i r_i a s_i \mid r, s, r_i, s_i \in R, n \in \mathbb{Z}\}$, egységelemes gyűrűben: $(a) = \{\sum_i r_i a s_i \mid r_i, s_i \in R\}$.
7. Az R gyűrű I és J ideáljai által generált ideál: $(I, J) = I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$. Az I és J komplexusszorzata által generált ideál $IJ := \{\sum_i a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J\}$.

---

8. Határozzuk meg $\mathbb{R}[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ gyűrű ideáljait.
9. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2) \cong \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

10. Mely $m > 0$ egészekre igaz, hogy a $\mathbb{Z}/(m)$ gyűrűben a nullosztók a nullával együtt ideált alkotnak?

11. Legyen R gyűrű. Igazoljuk, hogy az $(r, n)(s, m) := (rs + mr + ns, nm)$ szorzásra nézve az $R \times \mathbb{Z}$ Abel-csoport egységelemes gyűrűvé válik, melyben az $(r, 0)$ alakú elemek R-rel izomorf részgyűrűt alkotnak. *Ezért minden gyűrű beágyazható egységelemes gyűrűbe.*

Nehezebb feladatok

12. Bizonyítsuk be, hogy a két elemmel generált szabad csoportnak van olyan részcsoportja, melynek szabad generátorrendszere végtelen.