

Algebra3 matematikus szakirány

5. gyakorlat

2022. október 14.

1. Határozzuk meg az alábbi csoportok kommutátorrészcsoportját: $D_n, Q, S_n, A_n, \text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.
2. Igazoljuk, hogy feloldható csoport részcsoportja és faktorcsoportha is feloldható.
3. (beadandó HF) Igazoljuk, hogy adott $n \geq 1$ -re az invertálható $n \times n$ -es felsőháromszög-mátrixok csoportja feloldható (függetlenül az alaptesttől).
4. Igazoljuk, hogy ha $N, K \triangleleft G$ feloldható normálosztók G -ben, akkor NK is az.
5. Igazoljuk (Burnside kétprímes tételének felhasználása nélkül), hogy ha p prím és $\alpha \geq 0$ egész, akkor minden $4p^\alpha$ rendű csoport feloldható.
6. a) Igazoljuk, hogy ha $N \triangleleft G$ és $K \leq N$ karakterisztikus részcsoport, akkor $K \triangleleft G$.
b) Melyek azok az Abel-csoportok, melyeknek nincs nemtriviális karakterisztikus részcsoportja?
c) Igazoljuk, hogy minden G véges feloldható csoport minden minimális normálosztója (azaz olyan $N_1 \neq \{1\}$ normálosztója, mely nem tartalmaz valódi $N_1 \supsetneq K \neq \{1\}$ részcsoportot, melyre $K \triangleleft G$) elemi Abel p -csoport, azaz Z_p^n direkt hatvánnyal izomorf valamilyen p prímre és $n \geq 1$ egészre.
d) Igazoljuk, hogy feloldható csoport minden maximális részcsoportja prímhatvány indexű.
7. Igazoljuk, hogy ha G egy nemkommutatív véges egyszerű csoport, akkor minden valódi részcsoportjának indexe legalább 5.
8. Igazoljuk, hogy izomorfia erejéig csak egyetlen 60-rendű egyszerű csoport van. (Segítség: keressünk a Sylow-tételek segítségével egy legfeljebb 5 indexű $H < G$ valódi részcsoportot, majd tekintsük G hatását a H szerinti mellékosztályokon. Ez megad egy $G \rightarrow S_5$ homomorfizmust.)

Nehezebb feladatok

9. Adjunk példát olyan csoportra, melyben a kommutátorok nem alkotnak részcsoportot.
10. Igazoljuk, hogy a 3-dimenziós (\mathbb{R} feletti) euklideszi tér egybevágóságainak $E(3)$ csoportja nem feloldható.