Algebra3 matematikus szakirány

4. feladatsor

2022. október 7.

1. Melyik csoporttal izomorf az S_4 csoport 2-Sylow részcsoportja?

2. Legyen P egy p-Sylow G-ben, és $N \lhd G$. Igazoljuk, hogy PN/N egy p-Sylowja G/N-nek, és $P \cap N$ egy p-Sylowja N-nek.

3. (beadandó HF) Tegyük föl, hogy a G csoport rendjében a p prím első hatványon szerepel. Mutassuk meg, hogy a p-Sylow részcsoportok száma a p-edrendű elemek számának a $p-1$-ed része.

4. Igazoljuk, hogy ha a G csoportban minden p-Sylow részcsoport normálosztó minden p prímre, akkor G a Sylow részcsoportjainak direkt szorzata.

5. Igazoljuk, hogy nincs $200, 204, 260, 56, 616$ rendű egyszerű csoport.

6. Igazoljuk, hogy ha p, q, r különböző prímek, akkor nincs pqr rendű egyszerű csoport.

7. Igazoljuk, hogy ha p és q különböző prímek, akkor nincs p^2q rendű egyszerű csoport.

8. Legyen p egy prím és $P \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ egy p-Sylow részcsoport. Igazoljuk, hogy van olyan $0 \neq v \in \mathbb{F}_p^n$ vektor, ami közös sajátvektora (a $\lambda = 1$ sajátértékhez) az összes $g \in P$ mátrixnak.

9. (Frattini elv) Legyen $N \lhd G$ és P egy p-Sylowja N-nek. Igazoljuk, hogy $G = NN_G(P)$, és hogy $N_G(P)$ tartalmazza G egy p-Sylow részcsoportját.

10. Tegyük fel, hogy $K \leq G$ tartalmazza G egy p-Sylowjának normalizátorát. Mutassuk meg, hogy $N_G(K) = K$ és $|G : K| \equiv 1 \pmod{p}$.

---

11. Legyenek $p \neq q$ prímek. Igazoljuk, hogy bármely két nemkommutatív pq rendű csoport izomorf.

Nehezebb feladatok

12.* Igazoljuk, hogy ha $p \neq q$ prímek és $a > 0$ egész, akkor nincs p^aq rendű egyszerű csoport.