Algebra3 matematikus szakirány

3. feladatsor

2022. szeptember 30.

1. Legyen $g \in G$ egy tetszőleges n rendű elem egy G csoportban, ahol $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. Írjuk fel g-t $g = g_1 \dots g_r$ alakban, ahol a g_i-k ($i = 1, \dots, r$) páronként felcserélhetők és g_i rendje $p_i^{\alpha_i}$.

2. Legyen A egy véges Abel-csoport, és p egy prímszám. Bizonyítsuk be, hogy A felbomlik két részcsoportjának a direkt szorzatára, melyek közül az egyik egy p-csoport, a másik rendje pedig nem osztható p-vel. Egyértelmű-e a felbontás?

3. Legyen A Abel-csoport, $n > 0$ egész szám, és írjuk az A-beli műveletet additívan. Bizonyítsuk be, hogy $nA := \{na \mid a \in A\}$, és $A[n] := \{a \in A \mid na = 0\}$ *karakterisztikus részcsoportok*, azaz ha $\varphi \colon A \to A$ egy tetszőleges automorfizmus, akkor $\varphi(nA) = nA$, ill. $\varphi(A[n]) = A[n]$.

4. Hányféleképpen bontható fel a $Z_p \times Z_p$ csoport két valódi részcsoportjának direkt szorzatára?

5. (beadandó HF) Hány p^2 rendű elem van $Z_{p^2} \times Z_p$-ben? És hány p^2 rendű részcsoport?

---

6. Legyen G egy csoport és $Z(G)$ a centruma. Igazoljuk, hogy $Z(G)$ karakterisztikus részcsoport G-ben.

7. Igazoljuk, hogy a C_n n-edrendű ciklikus csoport automorfizmuscsoportja izomorf $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$-vel (azaz a mod n redukált maradékosztályok multiplikatív csoportjával).

8. Legyen $n \geq 1$ egész és p egy prímszám. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Aut}(\underbrace{C_p \times \cdots \times C_p}_{n}) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

9. Legyen G egy csoport, és $H \leq G$ egy részcsoport. Ekkor H *normalizátora* G-ben az $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. Igazoljuk, hogy ez a legnagyobb részcsoportja G-nek, amiben H normálosztó. Bizonyítsuk be, hogy az $N_G(H) \to \mathrm{Aut}(H)$ természetes homomorfizmus magja $C_G(H) = \{g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in H\}$ (ezt hívják H centralizátorának). (Mi ez a természetes homomorfizmus?)

10. Hány elemű az $\langle (12 \cdots n) \rangle \leq S_n$ részcsoport normalizátora S_n-ben?

11. Legyen $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, és $T \leq G$ a diagonális invertálható mátrixok csoportja. Bizonyítsuk be, hogy $C_G(T) = T$. Melyik ismert csoporttal izomorf $N_G(T)/T$? Próbáljuk meg általánosítani a feladatot $\mathbb{C}$ helyett más testre.

---

12. Legyen G egy csoport, $H \leq G$ és X egy halmaz, amin G tranzitívan hat, és $x \in X$ tetszőleges. Adjunk meg egy bijekciót az X-beli H-orbitok és a $(H, \mathrm{Stab}_G(x))$ pár kettős mellékosztályai között.

Nehezebb feladatok

13. Adjunk példát olyan $H < G$ csoportokra és $g \in G$ elemre, melyre $gHg^{-1} \lneq H$.

14. Adjunk példát olyan G (végtelen) csoportra, és $H < G$ valódi részcsoportra, melyre $G = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$.

15. Legyen $U \leq G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ azon felsőháromszög-mátrixok csoportja, melyekben a főátló elemei 1-esek. Mi $N_G(U)$?

16. Legyen $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ és B az invertálható felsőháromszög-mátrixok részcsoportja. Igazoljuk, hogy pontosan $n!$ darab kettős mellékosztálya van G-nek a (B, B) pár szerint és a permutáció mátrixok egy reprezentánsrendszert alkotnak.