

Algebra3 matematikus szakirány

1. feladatsor

2022. szeptember 16.

1. Igazoljuk, hogy ha egy csoportban minden elem rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.
2. Legyen g egy n -edrendű elem a G csoportban. Mennyi g^k rendje? Hány n -edrendű elem van G -ben legalább?
3. Mely n egészekre és K testekre lesz a $\text{GL}_n(K)$ csoport kommutatív?
4. Mennyi $|\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)|$? És $|\text{SL}_n(\mathbb{F}_p)|$?
5. Milyen elemrendek fordulnak elő a $\text{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ csoportban?
6. Mutassuk meg, hogy ha g és h relatív prím rendű egymással felcserélhető elemek egy csoportban, akkor $o(gh) = o(g)o(h)$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?
7. Mik lehetnek $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ -ben egy p -edrendű elem sajátértékei?
8. Legyen G egy csoport, H_1 és H_2 részcsoporthok G -ben. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy $H_1 \cup H_2$ is részcsoporth legyen G -ben.
9. Van-e A_4 -ben 6-odrendű részcsoporth?
10. Legyen G csoport és $H \leq K \leq G$ részcsoporthok. Igazoljuk, hogy $|G:H|$ pontosan akkor véges, ha $|G:K|$ és $|K:H|$ is véges, és ilyenkor $|G:H| = |G:K| \cdot |K:H|$.
11. Mutassuk meg, hogy egy csoportban két véges indexű részcsoporth metszete is véges indexű.
12. Adjunk meg $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ -ben egy Q -val (kvaterniók) izomorf részcsoporthot.
13. Határozzuk meg a sík egybevágósági transzformációiból álló véges csoportokat.
14. (beadandó HF) Határozzuk meg S_4 összes részcsoporthját.

Nehezebb feladatok

- 15* Igazoljuk, hogy tetszőleges test multiplikatív csoportjának tetszőleges véges részcsoporthja ciklikus.
- 16* Bizonyítsuk be, hogy ha $2 \leq n < p$ és p prím, akkor $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ -ben nincs p^2 rendű elem.
- 17* Bizonyítsuk be, hogy ha G egy végtelen Abel csoport, melyben minden valódi részcsoporth véges, akkor $G \cong Z_{p^\infty}$ valamilyen p prímszámra, ahol Z_{p^∞} a p -hatványrendű komplex egységgyökök csoportja.
- 18* Legyenek A és B részcsoporthok a G csoportban. Bizonyítsuk be, hogy az AB komplexszorzat elemeszámra $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$.

- 19.* Igazoljuk, hogy egy véges G csoport rendje pontosan akkor páros, ha G -ben van másodrendű elem.
- 20.* Igazoljuk, hogy $n \geq 3$ esetén A_n minden eleme (azaz minden páros permutáció) előáll hármasciklusok szorzataként.
- 21.* Legyen G véges csoport, $H \leq G$ részcsoporth. Igazoljuk, hogy G -ben van olyan H szerinti bal oldali reprezentánsrendszer, ami egyben jobboldali reprezentánsrendszer is.