Algebra3 matematikus szakirány

Dolgozat 2020. november 9. – megoldások

1. Egyszerű mtrixszorzás mutatja, hogy a centrum azon mátrixokból áll, melyekre $a = b = 0$, $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

2. Vegyük észre, hogy $H = \{1, (12), (34), (12)(34)\}$. Pl. $g = (23)$ jó lesz, mert $g(12)g^{-1} = (13) \notin H$.

3. Legyen G a szimmetriacsoport. Az egyik (P jelű) piros lap pályája 2 elemű (csak a saját magába vagy a másik piros lapba mehet, de a másik piros lapba át is tudjuk vinni a lappal párhuzamos lapfelező síkra való tükrözéssel). Tehát a pálya-stabilizátor lemma szerint $|G : G_P| = 2$. A K kék lappal párhuzamos tükrözés P-t fixen hagyja, ezért K stabilizátora G_P-ben szintén $|G_P : G_{P,K}| = 2$ indexű. Továbbá a Z zöld lappal párhuzamos tükrözés P-t és K-t is stabilizálja, azaz $|G_{P,K} : G_{P,K,Z}| = 2$. Végül $G_{P,K,Z}$ már 1 elemű, hiszen a három lap közös csúcsát és az azzal szomszédos csúcsokat is minden $G_{P,K,Z}$-beli szimmetria stabilizálja. Tehát $|G| = 2^3 = 8$.

4. Egy $g \in C_4 \times C_8 \times C_2 \times C_3$ elem rendje megegyezik a komponensei rendjének a legkisebb közös többszörösével. Tehát egy 2-hatvány rendű elem C_3-beli komponense csak az egységelem lehet. Vegyük észre továbbá, hogy legfeljebb 2 rendű elem mindhárom 2-hatványrendű direkt összeadandóban 2 darab van, azaz összesen $2^3 = 8$ darab. Másrészt C_8-ban 4 darab 8-adrendű elem van, ezért összesen $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ darab 8-adrendű elem lesz, hiszen a C_4-beli és a C_2-beli komponens tetszőleges. Végezetül a negyedrendű elemek száma $|C_8 \times C_4 \times C_2| - 8 - 32 = 24$.

5. Először is a szabályos tetraédernek 6 éle van, ezért ezeket 4 színnel $4^6 = 2^{12} = 4096$-féleképpen lehet kiszínezni (számozottan, azaz minden színezést különbözőnek tekintve). Másrészt a szabályos tetraéder szimmetriacsoportja S_4, ebben az irányítástartó transzformációk részcsoportja A_4. Tehát A_4 pályáinak a számát kérdezzük a lehetséges színezéseken. A Burnside-lemma szerint a pályák száma megegyezik a csoportelemek fixpontjainak átlagos számával. A_4 elemei az egységelem (1 darab), a hármasciklusok (8 darab), illetve diszjunkt transzpozíciók szorzatai (3 darab). Az egységelemnek nyilván 4096 fixpontja van. Ha veszünk egy hármasciklust, amely pl. az A csúcsot fixálja akkor egy színezés annak pontosan akkor fixpontja, ha az A-ból kiinduló élek mind egyformák, és a másik 3 csúcsot összekötő élek is mind egyformák. Tehát $4^2 = 16$ darab fixpont van. Végezetül két diszjunkt transzpozíció szorzatánál minden él a vele átellenes élbe megy, tehát egy színezés pontosan akkor fixpont, ha az átellenes élek azonos színűek. Mivel három átellenes pár van, ezért $4^3 = 64$ fixpont van. Tehát a fixpontok átlagos száma $\frac{4^6+8\cdot 4^2+3\cdot 4^3}{12} = 416$.

6. Ha $n > 1$, akkor n-nek van egy p prímosztója, tehát elegendő belátni az állítást $n = p$ esetén, hiszen ha G egy $3p^2$ rendű nemkommutatív csoport, akkor $G \times C_{n^2/p^2}$ jó lesz, ahol C_{n^2/p^2} ciklikus. Vegyük a $C_p \times C_p$ csoportot, tanultuk, hogy ennek $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ az automorfizmuscsoportja. Továbbá $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$, ami tetszőleges p prím esetén osztható 3-mal, hiszen osztható három egymást követő egész szorzatával ($(p-1)p(p+1)$). Cauchy tétele szerint így $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-ben van 3-adrendű elem, ezért létezik a $(C_p \times C_p) \rtimes C_3$ nemkommutatív szemidirekt szorzat, ami $3p^2$ rendű.

7. Legyen $|G| = 2^4 5^{100}$ és tegyük fel, hogy G egyszerű. Ekkor G-ben az 5-Sylowok száma egyrészt $\equiv 1 \pmod 5$, másrészt osztója $2^4 = 16$-nak. Ha egyetlen 5-Sylow van, akkor az normálosztó, ezért szükségképpen 16 darab van, hiszen $2, 4, 8 \not\equiv 1 \pmod 5$. Tekintsük G hatását a konjugálással az 5-Sylowok halmazán. Ez a hatás tranzitív, ezért kapunk egy $\varphi\colon G \to S_{16}$ csoporthomomorfizmust, ami nem triviális. Mivel G egyszerű és $\mathrm{Ker}(\varphi) \lhd G$, ezért φ injektív. Viszont $|G| = 2^4 5^{100} \nmid |S_{16}| = 16!$ (pl. mert a 16! prímfelbontásában az 5 csak harmadik hatványon szerepel), ami ellentmond Lagrange tételének.