Algebra3 matematikus szakirány

Dolgozat 2020. november 9.

Minden feladat 10 pontot ér, a dolgozatra csak pontszámot adok, jegyet nem. Az elégségeshez a dolgozatból legalább 10 pontot és a házi feladatokkal együtt legalább 35 pontot kell elérni. Ha a minimumkövetelmények teljesülnek, akkor a házi feladatokkal együtt 50 ponttól közepes, 65 ponttól jó, 80 ponttól jeles a gyakorlati jegy. A dolgozat írása közben mindenkinél legyen **bekapcsolva a kamera/mikrofon és legyen bent a teams értekezletben**! Írott segédeszköz használható, de a dolgozatírás közben másokkal bármilyen módon kommunikálni tilos. 120 perc van a megoldásra.

1. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alakú mátrixok ($a, b, c \in \mathbb{R}$) csoportjának centrumát.
2. Legyen H az (12) és (34) által generált részcsoport S_4-ben. Adjunk meg olyan $g \in S_4$ elemet, melyre $gH \neq Hg$.
3. Egy kocka három szemközti lappárját pirosra, zöldre, illetve kékre festjük. Hány olyan szimmetriája van a kockának, ami a színeket megtartja?
4. Hány 4-edrendű elem van a $C_4 \times C_8 \times C_2 \times C_3$ csoportban? (Itt C_n az n-edrendű ciklikus csoportot jelöli, ha $n \geq 1$ egész.)
5. Egy szabályos tetraéder *éleit* 4 színnel színezzük. Hányféleképpen tehető ez meg, ha nem különböztetjük meg azokat a színezéseket, melyek egy *irányítástartó* transzformációval egymásbavihetők?
6. Igazoljuk, hogy minden $n > 1$ egész számra létezik $3n^2$ rendű *nemkommutatív* csoport.
7. Burnside kétprímes tételének felhasználása nélkül igazoljuk, hogy nincs $2^4 5^{100}$ rendű *egyszerű* csoport.