Algebra3 matematikus szakirány

9. gyakorlat

2020. december 11.

1. Legyen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ R-modulusoknak egy egzakt sorozata, M pedig egy tetszőleges R-modulus. Bizonyítsuk be, hogy a
$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B,M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A,M)$$
sorozat is egzakt, ahol $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(C,M)$ esetén $g^*(\gamma) = \gamma \circ g$ és $\beta \in \mathrm{Hom}_R(B,M)$ esetén $f^*(\beta) = \beta \circ f$.

2. (beadandó 10 pont) Kígyó lemma:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1}$$
A fenti kommutatív diagramban a két középső sor egzakt. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a
$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma) \to 0$$
sorozat is egzakt, ahol $\varphi\colon X \to Y$ (modulus)homomorfizmusra $\mathrm{Coker}(\varphi) := Y/\mathrm{Im}(\varphi)$ a φ *komag*ja. A fenti sorozatban minden leképezést az (1) diagram soraiban levő leképezések indukálnak, kivéve δ-t, melynek megkonstruálása a feladat része.

3. Legyen $0 \to Z_2 \to Z_4 \to Z_2 \to 0$ $\mathbb{Z}$-modulusoknak rövid egzakt sorozata. Széteső-e ez a sorozat?

4. Van-e olyan $0 \to Z_2 \to Z_2 \oplus Z_2 \to Z_2 \to 0$ rövid egzakt sorozat, ami nem széteső?

5. Legyen R integritási tartomány, M egy R-modulus, $m \in M$. Azt mondjuk, hogy m *torzióelem*, ha $\mathrm{Ann}_R(m) \neq \{0\}$. Jelölje T a torzióelemek halmazát. M-et *torziómentes* modulusnak nevezzük, ha $T = \{0\}$, *torziómodulus*nak, ha $T = M$. Igazoljuk, hogy T részmodulusa M-nek, és hogy M/T torziómentes.

6. Bizonyítsuk be, hogy integritási tartomány felett minden projektív modulus torziómentes.

7. Igazoljuk, hogy ha A torziómentes Abel-csoport, D pedig osztható Abel-csoport, akkor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,D)$ osztható Abel-csoport.

8. Bizonyítsuk be, hogy az M R-modulus akkor és csak akkor injektív, ha minden $L \lhd_b R$ balideálhoz és minden $f\colon K \to M$ (modulus) homomorfizmushoz van olyan $g\colon R \to M$ (modulus) homomorfizmus, melyre $g_{|L} = f$.

---

9. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = 0$.

10. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}$.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha T torzió-, D pedig osztható Abel-csoport, akkor $D \otimes_{\mathbb{Z}} T = 0$.

12. Igazoljuk, hogy $R \otimes_R M \cong M$, ha M egy bal R modulus.

13.

14. Igazoljuk, hogy ha V és W végesdimenziós vektorterek a K test fölött, akkor $\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K V \dim_K W$.

15. Legyen R egy kommutatív gyűrű, M, N, K tetszőleges R-modulusok. Igazoljuk az alábbi izomorfizmusokat.

    (a) $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$.

    (b) $(M \otimes_R N) \otimes_R K \cong M \otimes_R (N \otimes_R K)$.

    (c) $(M \oplus N) \otimes_R K \cong (M \otimes_R K) \oplus (N \otimes_R K)$. Igaz marad az állítás végtelen sok tényezős direkt összegre? És direkt szorzatra?

16. Igazoljuk, hogy ha P projektív R-modulus, akkor a P-vel való tenzorszorzás egzakt, azaz rövid egzakt sorozatot rövid egzaktba visz. Az olyan modulusokat, melyekkel való tenzorszorzás egzakt, *lapos* modulusoknak nevezzük.

Nehezebb feladatok

17. Igazoljuk, hogy (kommutatív) lokális gyűrű fölött minden végesen generált projektív modulus szabad. (Az állítás igaz nem feltétlenül végesen generált projektív modulusokra is.)

18. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ lapos $\mathbb{Z}$-modulus, de nem projektív.

19. Igazoljuk, hogy egy Abel-csoport pontosan akkor lapos, ha torziómentes.

20.** Legyen R egy noether-féle integritási tartomány és M egy végesen generált R-modulus. Igazoljuk, hogy M akkor és csak akkor lapos, ha projektív.