

# Algebra3 matematikus szakirány

5. gyakorlat  
2020. október 9.

1. (beadandó HF) Határozzuk meg az alábbi csoportok kommutátorrészcsoportját:  $D_n$ ,  $Q$ ,  $S_n$ ,  $A_n$ ,  $GL_2(\mathbb{F}_2)$ .
2. Igazoljuk, hogy feloldható csoport részcsoportja és faktorcsoportha is feloldható.
3. Igazoljuk, hogy az invertálható felsőháromszög-mátrixok csoportja feloldható (függetlenül az alaptesttől és a dimenziótól).
4. Igazoljuk, hogy ha  $N, K \triangleleft G$  feloldható normálosztók  $G$ -ben, akkor  $NK$  is az.
5. Igazoljuk (Burnside kétprímes tételének felhasználása nélkül), hogy ha  $p$  prím és  $\alpha \geq 0$  egész, akkor minden  $4p^\alpha$  rendű csoport feloldható.
6. a) Igazoljuk, hogy ha  $N \triangleleft G$  és  $K \leq N$  karakterisztikus részcsoport, akkor  $K \triangleleft G$ .  
b) Melyek azok az Abel-csoportok, melyeknek nincs nemtriviális karakterisztikus részcsoportja?  
c) Igazoljuk, hogy minden  $G$  véges feloldható csoport minden minimális normálosztója (azaz olyan  $N_1 \neq \{1\}$  normálosztója, mely nem tartalmaz valódi  $N_1 \supsetneq K \neq \{1\}$  részcsoportot, melyre  $K \triangleleft G$ ) elemi Abel  $p$ -csoport, azaz  $Z_p^n$  direkt hatvánnyal izomorf valamilyen  $p$  prímre és  $n \geq 1$  egészre.  
d) Igazoljuk, hogy feloldható csoport minden maximális részcsoportja prímhatvány indexű.
7. Igazoljuk, hogy ha  $G$  egy nemkommutatív véges egyszerű csoport, akkor minden valódi részcsoportjának indexe legalább 5.
8. Igazoljuk, hogy izomorfia erejéig csak egyetlen 60-rendű egyszerű csoport van. (Segítség: keressünk a Sylow-tételek segítségével egy legfeljebb 5 indexű  $H < G$  valódi részcsoportot, majd tekintsük  $G$  hatását a  $H$  szerinti mellékosztályokon. Ez megad egy  $G \rightarrow S_5$  homomorfizmust.)

---

## *Nehezebb feladatok*

9. Adjunk példát olyan csoportra, melyben a kommutátorok nem alkotnak részcsoportot.
10. Igazoljuk, hogy a 3-dimenziós ( $\mathbb{R}$  feletti) euklideszi tér egybevágóságainak  $E(3)$  csoportja nem feloldható.