Algebra3 matematikus szakirány

1. feladatsor

2020. szeptember 8–11.

1. Igazoljuk, hogy ha egy csoportban minden elem rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.

2. Legyen g egy n-edrendű elem a G csoportban. Mennyi g^k rendje? Hány n-edrendű elem van G-ben legalább?

3. Mely n egészekre és K testekre lesz a $\mathrm{GL}_n(K)$ csoport kommutatív?

4. Mennyi $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)|$? És $|\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)|$?

5. Milyen elemrendek fordulnak elő a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ csoportban?

6. Mutassuk meg, hogy ha g és h relatív prím rendű egymással felcserélhető elemek egy csoportban, akkor $o(gh) = o(g)o(h)$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?

7. Mik lehetnek $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-ben egy p-edrendű elem sajátértékei?

8. Legyen G egy csoport, H_1 és H_2 részcsoportok G-ben. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy $H_1 \cup H_2$ is részcsoport legyen G-ben.

9. Van-e A_4-ben 6-odrendű részcsoport?

10. Legyen G csoport és $H \leq K \leq G$ részcsoportok. Igazoljuk, hogy $|G\colon H|$ pontosan akkor véges, ha $|G\colon K|$ és $|K\colon H|$ is véges, és ilyenkor $|G\colon H| = |G\colon K| \cdot |K\colon H|$.

11. Mutassuk meg, hogy egy csoportban két véges indexű részcsoport metszete is véges indexű.

12. Adjunk meg $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-ben egy Q-val (kvaterniók) izomorf részcsoportot.

13. Határozzuk meg a sík egybevágósági transzformációiból álló véges csoportokat.

14. (beadandó HF) Határozzuk meg S_4 összes részcsoportját.

Nehezebb feladatok

15.* Igazoljuk, hogy tetszőleges test multiplikatív csoportjának tetszőleges véges részcsoportja ciklikus.

16.* Bizonyítsuk be, hogy ha $2 \leq n < p$ és p prím, akkor $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$-ben nincs p^2 rendű elem.

17.* Bizonyítsuk be, hogy ha G egy végtelen Abel csoport, melyben minden valódi részcsoport véges, akkor $G \cong Z_{p^\infty}$ valamilyen p prímszámra, ahol Z_{p^∞} a p-hatványrendű komplex egységgyökök csoportja.

18.* Legyenek A és B részcsoportok a G csoportban. Bizonyítsuk be, hogy az AB komplexusszorzat elemeszáma $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$.

19.* Igazoljuk, hogy egy véges G csoport rendje pontosan akkor páros, ha G-ben van másodrendű elem.

20.* Igazoljuk, hogy $n \geq 3$ esetén A_n minden eleme (azaz minden páros permutáció) előáll hármasciklusok szorzataként.

21.* Legyen G véges csoport, $H \leq G$ részcsoport. Igazoljuk, hogy G-ben van olyan H szerinti bal oldali reprezentánsrendszer, ami egyben jobboldali reprezentánsrendszer is.