Algebra3 matematikus – megoldások

2. ZH

2016. december 15.

1. $3+\sqrt{3}i = \sqrt{3}i \cdot 2 \cdot (-\varepsilon)$, ahol $\lambda = \sqrt{3}i$ és 2 Euler-prímek (utóbbi azért, mert kongruens 2-vel modulo 3), $(-\varepsilon)$ pedig egység.

2. $\mathrm{Ann}_R(M) = \{0\}$, hiszen csak a 0 mátrix az, ami mindkét bázisvektort a 0-ba küldi. A konkrét elem annullátora $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$ alakú mátrixokból áll ($a, b \in \mathbb{R}$).

3. Mivel P végesen generált, létezik egy $R^n \twoheadrightarrow P$ szürjektív homomorfizmus alkalmas n-re. Mivel P projektív, ezért ennek van egy szelése, azaz $R^n \cong P \oplus Q$ valamilyen Q modulusra. Ekkor viszont $R^n \cong \mathrm{Hom}_R(R^n, R) \cong \mathrm{Hom}_R(P, R) \oplus \mathrm{Hom}_R(Q, R)$, azaz $\mathrm{Hom}_R(P, R)$ direkt összeadandó az R^n szabad modulusban, tehát projektív.

4. A végességi feltétel nélkül az állítás nem igaz, $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p\cdot} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$ ellenpélda, hiszen $\mathbb{Z}(p) = 0$, de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Az $A(p)$-nél való egzaktság nyilvánvaló, hiszen a leképezés az f megszorítása. Az is világos, hogy $g_p \circ f_p = 0$. Továbbá ha $b \in \mathrm{Ker}(g_p)$, akkor $b \in \mathrm{Ker}(g)$, azaz van olyan $a \in A$, melyre $f(a) = b$. Viszont $b \in B(p)$ miatt alkalmas n-re $p^n b = 0$, azaz $f(p^n a) = p^n f(a) = 0$, de f injektív, ezért $p^n a = 0$, azaz $a \in A(p)$. Tehát b benne van f_p képében. Eddig nem használtuk ki, hogy A, B, C véges, az csak a $C(p)$-nél való egzaktsághoz kell. Ezt kétféleképpen is indokolhatjuk: 1) $A(p), B(p)$, ill. $C(p)$ elemszáma nem más, mint A, B, ill. C elemszámának legnagyobb p-hatvány osztója. Viszont az eredeti sorozat egzaktsága miatt $|A| \cdot |C| = |B|$, így $|A(p)| \cdot |C(p)| = |B(p)|$, és g_p képe épp $\frac{|B(p)|}{|A(p)|}$ elemű, ezért g_p szürjektív. 2) Ebben csak annyit teszünk fel, hogy A torziócsoport (ennyi is elég). Vegyünk egy $c \in C(p)$ elemet. Mivel g szürjektív, ezért van olyan $b \in B$, melyre $g(b) = c$. Másrészt alkalmas $n > 0$-ra $g(p^n b) = p^n c = 0$, azaz $p^n b \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Tehát van olyan $a \in A$, melyre $f(a) = p^n b$. Mivel A torziócsoport, van olyan $k > 0$ egész, melyre $ka = 0$, speciálisan $kp^n b = f(ka) = 0$. Írjuk k-t $k = p^l m$ alakba, ahol $p \nmid m$. Ekkor van olyan $m' > 0$ egész, melyre $mm' \equiv 1 \pmod{p^n}$. Tehát $g(mm'b) = mm'c = c$, hiszen $(mm' - 1)c = 0$ mivel $p^n c = 0$ és $p^n \mid mm' - 1$. Node $mm'b \in B(p)$, mert $p^{n+l} mm' b = m'(kp^n b) = 0$.

5. A Zorn lemma feltétele teljesül az ilyen H részcsoportok $\mathcal{H}$ halmazára: egyrészt a h által generált $\langle h \rangle$ részcsoport ilyen, mivel ez véges, tehát g nem lehet benne, hiszen az végtelen rendű. Tehát $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Másrészt $\mathcal{H}$ zárt a felszálló unióra.

6. 1. megoldás: Belátjuk k szerinti indukcióval, hogy van megoldás modulo p^k minden $k > 0$-ra. Ha $k = 1$, akkor ez nyilvánvaló, hiszen $1^n = 1 \equiv 1 + a_1 p + \dots \pmod{p}$. Tegyük fel, hogy valamilyen $k > 0$-ra már találtunk egy $x_k = 1 + b_1 p + \dots + b_{k-1} p^{k-1}$ alakú egész számot ($b_1, \dots, b_{k-1} \in \{0, 1 \dots, p-1\}$), melyre $x_k^n \equiv 1 + a_1 p + \dots + a_{k-1} p^{k-1}$ $\pmod{p^k}$, azaz $y_k := \frac{x_k^n - (1 + a_1 p + \dots + a_{k-1} p^{k-1})}{p^k} \in \mathbb{Z}$. Az x_{k+1}-et $x_k + p^k b_k$ alakban keressük, ahol $b_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Az kell, hogy $(x_k + p^k b_k)^n \equiv 1 + a_1 p + \dots a_k p^k \pmod{p^{k+1}}$.

A binomiális tétellel kifejtve és ekvivalens átalakításokat végezve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} 1 + a_1p + \dots a_kp^k \equiv (x_k + p^kb_k)^n = \\ = x_k^n + np^kb_kx_k^{n-1} + \binom{n}{2}p^{2k}b_k^2x_k^{n-2} + \dots + p^{kn}b_k^n \equiv \\ \equiv 1 + a_1p + \dots + a_{k-1}p^{k-1} + p^ky_k + np^kb_kx_k^{n-1} \pmod{p^{k+1}} \ ; \\ p^k(a_k - y_k) \equiv np^kb_kx_k^{n-1} \pmod{p^{k+1}} \ ; \\ a_k - y_k \equiv nb_kx_k^{n-1} \pmod{p} \ ; \\ \frac{a_k - y_k}{n} \equiv b_k \pmod{p} \ , \end{aligned}$$

hiszen $x_k \equiv 1 \pmod{p}$, és ez értelmes, mert $(n, p) = 1$. Ezzel a választással tehát egy modulo p^{k+1} megoldást kaptunk, k-val a végtelenbe tartva pedig egy $x := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_kp^k \in \mathbb{Z}_p$ elemet, melyre $x^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_kp^k$.

2. megoldás: Használjuk az $(1 + x)^{1/n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/n}{k}x^k$ binomiális sort, ami konvergál $|x|_p < 1$ esetén, ezért szolgáltat egy n-edik gyököt $1 \equiv 1 + a_1p + \dots$-nak. A konvergenciát a következőképpen láthatjuk be. Először is ha $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ és $k \geq 0$ egész, akkor $\binom{\alpha}{k} \in \mathbb{Z}_p$ értelmes: Jelölje ugyanis N a legnagyobb olyan egész számot, melyre $p^N \mid k!$ (azaz $|k!|_p = p^{-N}$). Ekkor $n > N$ esetén ha $a \equiv b \pmod{p^n}$ egészek, akkor $\binom{a}{k} \equiv \binom{b}{k} \pmod{p^{n-N}}$, speciálisan $a_n \to \alpha$ esetén $\binom{a_n}{k}$ konvergens p-adikusan. Mivel $1/n \in \mathbb{Z}_p$ (hiszen $(n, p) = 1$), ezért azt kapjuk, hogy $|\binom{1/n}{k}|_p \leq 1$. Speciálisan $|x|_p < 1$ esetén $|\binom{1/n}{k}x^k|_p \to 0$, így a sor konvergens. Az, hogy $(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/n}{k}x^k)^n = 1 + x$ igaz formális hatványsorokra is, tehát valóban kaptunk egy n-edik gyököt.

3. megoldás: Ez hasonló az előzőhöz, de most a binomiális sor helyett a log és exp hatványsorát használjuk. Sajnos ez csak $p > 2$-re működik, ettől még tanulságos. Rövid számolás mutatja, hogy a $\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ és az $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hatványsorok konvergensek p-adikusan, ha $|x|_p < p^{\frac{-1}{p-1}}$ (a $\log(1 + x)$-hez az is elég, hogy $|x|_p < 1$). Ezt úgy lehet belátni, hogy $k!$ prímtényezős felbontásában p épp a $\left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{k}{p^r}\right] + \dots$-edik hatványon szerepel. Ez a szám pedig (még egészrészek nélkül is) legfeljebb $\frac{k}{p-1}$, tehát $|\frac{1}{k!}|_p \leq p^{\frac{k}{p-1}}$, és így $|x|_p < p^{\frac{-1}{p-1}}$ esetén $|\frac{x^k}{k!}|_p \to 0$. (Egyébként a p-adikus konvergenciasugár meghatározására is használható a valósban megismert lim sup-os képlet, csak az abszolútértékeket p-adikus abszolútértékre kell cserélni.) Na most ha $p > 2$ és $p \mid x$, akkor $|x|_p \leq p^{-1} < p^{\frac{-1}{p-1}}$ (de $p = 2$-re csak $\leq$ jön ki, ami nem elég...). Mivel $(n, p) = 1$, ezért n-nel való osztás nem változtat a p-adikus abszolútértéken, továbbá $\log(1 + x)$ is osztható lesz p-vel, így $\exp(\frac{1}{n}\log(1 + x))$ értelmes és n-edik hatványa pont $1+x$ (ez azért igaz, mert ez a formális hatványsoroknak egy azonossága).

7. Legyen $R \leq \mathbb{Q}$ az olyan a/b alakú törtek gyűrűje, ahol $0 \neq b$ nem osztható az első 2016 darab prímszám egyikével se ($a, b \in \mathbb{Z}$). Mivel $\mathbb{Z}$-ben teljesül a számelmélet alaptétele, ezért R-ben is. $R^\times$ azon számokból áll, amiknek a számlálója sem osztható az első 2016 prímmel, a prímek pedig pont az első 2016 prímszám.