Algebra3 matematikus

2. ZH

2016. december 15.

A maximális pontszám minden feladatra 1 pont. A ZH jegye a pontszám egészrésze. Használni lehet az órai jegyzetet – számológépet, mobiltelefont viszont nem. A rendelkezésre álló idő 120 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Bontsuk prímtényezők szorzatára az Euler-egészek körében a $3+\sqrt{3}i$ számot.
2. Legyen $R = M_2(\mathbb{R})$ a valós test feletti 2×2-es mátrixgyűrű, és M a 2×1-es oszlopvektorok tere, mint bal R-modulus. Határozzuk meg $\mathrm{Ann}_R(M)$-et és az $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in M$ elem annullátorát.
3. Legyen P egy végesen generált projektív modulus egy kommutatív R gyűrű fölött. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Hom}_R(P,R)$ is projektív R-modulus.
4. Legyen $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ véges Abel-csoportok egy egzakt sorozata és p egy prímszám. Igazoljuk, hogy ekkor a $0 \to A(p) \xrightarrow{f_p} B(p) \xrightarrow{g_p} C(p) \to 0$ sorozat is egzakt, ahol egy G Abel-csoportra $G(p)$ a G csoport p-hatvány rendű elemeinek halmazát jelöli, és a leképezéseket az A, B, és C közötti leképezések indukálják. Igaz marad-e az állítás, ha nem tesszük fel az Abel-csoportok végességét?
5. Legyen G egy tetszőleges (végtelen) csoport és $h \in G$ véges rendű, $g \in G$ pedig végtelen rendű. Igazoljuk, hogy van G-ben olyan H részcsoport, mely maximális arra a tulajdonságra nézve, hogy $h \in H$ és $g \notin H$.
6. Legyen p prím és $n > 0$ egész úgy, hogy $(n,p) = 1$. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_p$-ben minden $1 + a_1 p + \cdots + a_k p^k + \ldots$ ($a_i \in \{0,1,\ldots,p-1\}$, $i \geq 1$) alakú elemnek van n-edik gyöke.
7. Adjunk meg olyan egyértelmű prímfaktorizációs tartományt, amelyben asszociáltság erejéig pontosan 2016 prímelem van.