Algebra3 matematikus szakirány

1. ZH – megoldások

2016. november 10.

1. Egyszerű mátrixszorzással adódik, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 & c_2 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1+a_2 & c_1+c_2+a_1b_2 \\ 0 & 1 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ha a fenti képletet összehasonlítjuk a fordított sorrendben történő szorzás eredményével, akkor azt kapjuk, hogy a két szorzatban a jobb felső sarokban levő elem kivételével minden megegyezik. Tehát $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ akkor és csak akkor van a centrumban, ha minden $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ számra

$$c_1 + c_2 + a_1b_2 = c_1 + c_2 + a_2b_1 \ . \qquad (1)$$

$b_2 = 1$ és $a_2 = 0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $a_1 = 0$, ill. $b_2 = 0$, $a_2 = 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $b_1 = 0$. Fordítva, ha $a_1 = b_1 = 0$ akkor (1) triviálisan teljesül.

2. Jelölje az $a + bi$ alakú számok gyűrűjét $\mathbb{Z}[i]$ és tekintsük a $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[i]$, „$i$ behelyettesítése" gyűrűhomomorfizmust. Ez szürjektív, hiszen az $a + bx$ polinom képe $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Másrészt $(x^2 + 1) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$, hiszen $\varphi(x^2 + 1) = i^2 + 1 = 0$. Megfordítva tegyük fel, hogy $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ benne van φ magjában, azaz $0 = \varphi(f(x)) = f(i)$. Osszuk el maradékosan $f(x)$-et $(x^2 + 1)$-gyel (ezt lehet $\mathbb{Z}[x]$-ben, hiszen utóbbi főegyütthatója 1), a maradék legfeljebb elsőfokú: $f(x) = (x^2 + 1)g(x) + bx + a$. Behelyettesítve i-t ebbe az egyenletbe azt kapjuk, hogy $0 = f(i) = a + bi$, azaz $a = b = 0$, tehát $f(x) \in (x^2 + 1)$. Azt kaptuk, hogy $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x^2 + 1)$, az állítás pedig következik a homomorfizmustételből.

3. Ha AB részcsoport, akkor zárt a szorzásra. Másrészt $1 \in A$ és $1 \in B$, ezért $B \subseteq AB$ és $A \subseteq AB$, tehát $BA \subseteq AB$. Tehát $AB = A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} \subseteq (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$ mivel $A^{-1} = A$ és $B^{-1} = B$. Tehát $AB = BA$. Visszafelé, ha $AB = BA$, akkor AB zárt az invertálásra, és a szorzásra is: $(AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = AABB = AB$, hiszen A és B is zárt a szorzásra.

4. Legyen H a véges konjugáltosztályú elemek részhalmaza. Először is azt kell belátni, hogy H részcsoport. H nyilván tartalmazza az egységelemet, és zárt az invertálásra. Legyen most $h_1, h_2 \in H$. Ekkor $g(h_1h_2)g^{-1} = (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})$, azaz h_1h_2 minden konjugáltja h_1 egy konjugáltjának és h_2 egy konjugáltjának a szorzata. Viszont h_1-nek és h_2-nek is véges sok konjugáltja van, ezért ezekből csak véges sok szorzat képezhető, tehát h_1h_2 konjugáltosztálya is véges. Ezzel beláttuk, hogy H részcsoport. Legyen most α egy automorfizmusa G-nek, és $h \in H$. Ekkor $\alpha(h)$ konjugáltosztálya nem más, mint h konjugáltosztályának képe α-nál, hiszen $g\alpha(h)g^{-1} = \alpha\left(\alpha^{-1}(g)h\left(\alpha^{-1}(g)\right)^{-1}\right)$.

5. Volt órán, hogy létezik egy $N_G(H) \to \mathrm{Aut}(H)$ homomorfizmus, melynek magja $C_G(H)$. Mivel $|H| = 4$, ezért $H \cong Z_4$ vagy $H \cong Z_2 \times Z_2$. Speciálisan H kommutatív, azaz $H \le C_G(H)$, ezért $|N_G(H)/C_G(H)| \Big| \frac{|G|}{|H|} = 35$. Node $\mathrm{Aut}(H) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \cong Z_2$, ha $H \cong Z_4$, és $\mathrm{Aut}(H) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$, ha $H \cong Z_2 \times Z_2$ (hiszen a 3 másodrendű elem tetszőleges permutációja szolgáltat egy automorfizmust). Mindkét esetben $(|N_G(H)/C_G(H)|, |\mathrm{Aut}(H)|) = 1$, hiszen $(35, 2) = (35, 6) = 1$. Viszont a Lagrange tétel miatt $|N_G(H)/C_G(H)| \Big| |\mathrm{Aut}(H)|$, tehát $|N_G(H)/C_G(H)| = 1$, ami épp a bizonyítandó állítás.

6. $176 = 2^4 \cdot 11$. Ha $|G| = 176$, akkor a 11-Sylowok száma egyrészt osztja $2^4 = 16$-ot, másrészt kongruens 1-gyel modulo 11. A 16 pozitív osztói $1, 2, 4, 8, 16$, ezek közül csak az 1 kongruens 1-gyel modulo 11, azaz egyetlen 11-Sylow van G-ben. Viszont akkor az egy N normálosztó, mely kommutatív, hiszen $N \cong Z_{11}$. A G/N faktorcsoport 16 elemű, ami prímhatvány, ezért feloldható, így G is feloldható.

7. Ha $A = Z_{2^{a_1}} \times \cdots \times Z_{2^{a_s}}$, akkor a 2-rendű elemek száma $2^s - 1$, tehát $s = 3$. Viszont $Z_{2^{a_1}} \times Z_{2^{a_2}} \times Z_{2^{a_3}}$-ban a 4-rendű elemek száma $4^3 - 8$, $2 \cdot 4^2 - 8$ ill. $2 \cdot 2 \cdot 4 - 8$ aszerint hogy az a_i-k között az 1-nél nagyobbak száma 3, 2 vagy 1. Ezek közül csak $2 \cdot 2 \cdot 4 - 8$ egyenlő 8-cal, ezért $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 8$.