Algebra3 matematikus

1. ZH

2016. november 10.

A maximális pontszám minden feladatra 1 pont. A ZH jegye a pontszám egészrésze. Használni lehet az órai jegyzetet – számológépet, mobiltelefont viszont nem. A rendelkezésre álló idő 120 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alakú mátrixok $(a, b, c \in \mathbb{R})$ csoportjának centrumát.
2. Igazoljuk, hogy az $a + bi$ alakú számok gyűrűje $(a, b \in \mathbb{Z})$ izomorf a $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$ faktorgyűrűvel.
3. Legyen $A, B \leq G$ részcsoportok egy G csoportban. Mutassuk meg, hogy az $AB = \{ab \in G \mid a \in A,\ b \in B\}$ komplexusszorzat pontosan akkor részcsoport, ha $AB = BA$.
4. Bizonyítsuk be, hogy egy G csoport azon elemei, melyeknek konjugáltosztálya véges, karakterisztikus részcsoportot alkotnak.
5. Igazoljuk, hogy minden 176 rendű csoport feloldható.
6. Legyen $H \leq G$, ahol $|H| = 4$ és $|G| = 140$. Bizonyítsuk be, hogy $C_G(H) = N_G(H)$.
7. Egy 1024 rendű Abel-csoportban 7 másodrendű és 8 negyedrendű elem van. Állapítsuk meg, hogy milyen 2-hatvány rendű ciklikus csoportok direkt szorzatára bomlik a csoport.