Algebra3 matematikus szakirány

9. gyakorlat

2016. november 24.

1.* Legyenek $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_n$ páronként inekvivalens abszolút értékelek a K testen, és $a_1, \dots, a_n \in K$. Igazoljuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $x \in K$, melyre $|x - a_i| < \varepsilon$ $(i = 1, \dots, n)$.

2. Igazoljuk, hogy pozitív karakterisztikájú testnek csak nemarkhimédeszi értékelése van.

3. Igazoljuk, hogy ha $(K, |\cdot|)$ egy nemarkhimédeszien értékelt test, akkor $\mathcal{O}_K := \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$ részgyűrű K-ban. Ezt hívják K-ban az egészek gyűrűjének. Mutassuk meg továbbá, hogy $\mathcal{O}_K$ lokális gyűrű. Mi lesz a maximális ideálja? Mi lesz $\mathcal{O}_K$, ha $K = \mathbb{Q}$ és $|\cdot|$ a p-adikus abszolútérték valamely p prímre?

4. Legyen $(K, |\cdot|)$ egy nemarkhimédeszien értékelt test, mely teljes $|\cdot|$-re nézve. Igazoljuk, hogy

   a) K-ban a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

   b) Egy $(a_n)_n$ sorozat akkor és csak akkor Cauchy, ha $|a_n - a_{n+1}| \to 0$ $(n \to \infty)$.

5.* Igazoljuk, hogy a p-adikus számok $\mathbb{Q}_p$ teste fölött létezik akárhanyadfokú irreducibilis polinom.

6. Legyen $\mathbb{Z}_p$ az egészek gyűrűje $\mathbb{Q}_p$-ben, azaz $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_p$ minden eleme egyértelműen írható $a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots$ konvergens összeg alakban, ahol $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ minden $i \geq 0$-ra. Mi a $-1 \in \mathbb{Z}_p$ felírása?

7. Igazoljuk, hogy az $a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots \in \mathbb{Z}_p$ felírású szám pontosan akkor invertálható $\mathbb{Z}_p$-ben, ha $a_0 \neq 0$.

8. Igazoljuk, hogy minden $0 \neq x \in \mathbb{Q}_p$ p-adikus szám egyértelműen írható $x = up^n$ alakban, ahol $u \in \mathbb{Z}_p^\times$, és $n \in \mathbb{Z}$, sőt, ekkor $|x|_p = p^{-n}$.

9. Igazoljuk, hogy $a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots \in \mathbb{Z}_p$ számnak, ahol $a_0 \neq 0$, pontosan akkor van négyzetgyöke $\mathbb{Z}_p$-ben, ha a_0 kvadratikus maradék modulo p. Mivel izomorf a $\mathbb{Q}_p^\times / (\mathbb{Q}_p^\times)^2$ csoport?

10.* (Hensel-lemma) Legyen $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ egy olyan polinom, melynek nem minden együtthatója osztható p-vel (azaz f *primitív*). Tegyük fel, hogy f-nek a modulo p redukciója $\overline{f} \in \mathbb{F}_p[x]$ felbomlik $\overline{f}(x) = \overline{g}(x)\overline{h}(x)$ alakban, ahol $\overline{g}, \overline{h} \in \mathbb{F}_p[x]$ *relatív prím* polinomok, azaz $(\overline{g}(x), \overline{h}(x)) = 1$. Igazoljuk, hogy léteznek olyan $g, h \in \mathbb{Z}_p[x]$ primitív polinomok, melyekre (i) $f(x) = g(x)h(x)$, (ii) $g \equiv \overline{g} \pmod{\mathfrak{p}}$ és $h \equiv \overline{h} \pmod{\mathfrak{p}}$, (iii) $\deg(g) = \deg(\overline{g})$. Mutassuk meg továbbá, hogy $\mathbb{Z}_p$-ben benne van az összes $(p-1)$-edik egységgyök.

---

11. Legyen M egy modulus az R gyűrű fölött, és $X \subseteq M$. Igazoljuk, hogy az X által generált részmodulus M-ben nem más, mint $\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R, x_i \in X, n \geq 0\}$.

12. Igazoljuk, hogy ha $S \leq R$ egységelemes részgyűrű az R egységelemes gyűrűben, akkor R egy S-modulus az R-beli szorzással és összeadással.

13. Legyen V vektortér a K test fölött, és $\varphi\colon V \to V$ lineáris leképezés. Ekkor V modulus $K[x]$ felett az $f(x)v := f(\varphi)(v)$ szorzással. Bizonyítsuk be, hogy V részmodulusai éppen a φ-invariáns alterek V-ben.

14. Igazoljuk, hogy ferdetest fölött minden (végesen generált) modulus szabad, azaz minden (végesen generált) modulusnak van bázisa. Mutassuk meg, hogy a bázis elemszáma is egyértelmű.

15. Igazoljuk, hogy (bal-)noether gyűrű fölött végesen generált (bal-)modulus minden részmodulusa is végesen generált.

16. Legyen V egy végesdimenziós vektortér a K test fölött, $R = \mathrm{End}_K(V)$. Igazoljuk, hogy V egyszerű modulus R fölött.

17. Legyen $f \in \mathrm{End}_R(M)$ idempotens, azaz $f^2 = f$. Bizonyítsuk be, hogy $M = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ mint R-modulus. Igazoljuk azt is, hogy minden direktösszeg-felbontás előáll ilyen alakban.

18. Egyszerű modulus endomorfizmusgyűrűjében mik az idempotens elemek?