Algebra3 matematikus szakirány

8. gyakorlat

2016. november 17.

1. A kvadratikus reciprocitás felhasználásával adjunk új bizonyítást az $x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia megoldhatóságát jellemző tételre (p pozitív prím).

2. Mutassuk meg, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ komplex szám egyértelműen írható $a + b\varepsilon$ alakba, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, és $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ primitív harmadik egységgyök. Igazoljuk továbbá, hogy az $a + b\varepsilon$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám pontosan akkor Euler-egész, ha $a, b \in \mathbb{Z}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $\pi\overline{\pi} = q \equiv 1 \pmod 3$, ahol π Euler-prím, q pedig közönséges prím, akkor π és $\overline{\pi}$ nem asszociáltak.

4. Igazoljuk, hogy ha α Euler-egész és π Euler-prím, akkor $\pi \mid \alpha^{N(\pi)} - \alpha$.

5. Mely n-ekre oldható meg az $x^2 + 3y^2 = n$ diofantikus egyenlet? *Hány megoldás van?

6.* Oldjuk meg az $x^2 + 243 = y^3$ diofantikus egyenletet.

7. Legyen $d \neq 0, 1$ négyzetmentes egész és $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ az $a+b\sqrt{d}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ alakú számok teste. $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nek mely elemei lesznek gyökei egy egész együtthatós normált polinomnak?

---

8. Legyen K test, és $\varphi\colon K \to K$ nem azonosan 0 homomorfizmus. Mutassuk meg, hogy φ fixen hagyja K prímtestének elemeit.

9. Legyen K egy test.

   (*i*) Mutassuk meg, hogy ha K karakterisztikája nem 2, akkor felírható benne a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

   (*ii*) Adjunk példát olyan 2 karakterisztikájú testre, és olyan másodfokú polinomra, melyre nem alkalmazható a megoldóképlet.

   (*iii*) Igaz-e, hogy ha K minden eleméből vonható négyzetgyök, akkor nincs K fölött irreducibilis másodfokú polinom?

10.* Adjunk példát olyan $p \neq 0$ karakterisztikájú K testre, melyre a Frob_p Frobenius endomorfizmus nem szürjektív. Igazoljuk azt is, hogy $\mathrm{Frob}_p(K)$ résztest K-ban. Mennyi lehet $\dim_{\mathrm{Frob}_p(K)} K$?

11. Tegyük fel, hogy a K test karakterisztikája nem osztja az $n > 0$ egész számot (azaz $\mathrm{char}K = 0$ vagy $\mathrm{char}K = p \nmid n$). Mutassuk meg, hogy az $\varepsilon \in K$ elem akkor és csak akkor gyöke a $\Phi_n(x)$ polinomnak, ha ε rendje n K multiplikatív csoportjában. Mi a helyzet, ha $\mathrm{char}K = p = n$?

12. Mely $p \mid n$ prímekre és c egészekre igaz, hogy $p^2 \mid \Phi_n(c)$?

13. Legyenek $m \neq n$ pozitív egészek. Mikor létezik olyan c egész szám, melyre a $\Phi_m(c)$ és $\Phi_n(c)$ számok nem relatív prímek? Mennyi lehet ekkor a két szám legnagyobb közös osztója?

---

14. Igazoljuk, hogy az R kommutatív egységelemes gyűrű akkor és csak akkor *lokális* (azaz egyetlen maximális ideálja van), ha a nem invertálható elemei ideált alkotnak.

15. Legyen R kommutatív egységelemes gyűrű és $P \lhd R$ *prímideál* (azaz $ab \in P$ esetén $a \in P$ vagy $b \in P$). Bizonyítsuk be, hogy $S := R \setminus P$ multiplikatívan zárt halmaz (azaz $1 \in S$ és S zárt a szorzásra nézve). A hányadostest mintájára készítsük el az $R[S^{-1}]$ halmazt (az összes $\neq 0$ elem helyett csak S elemei lehetnek a nevezőkben). Igazoljuk, hogy $R[S^{-1}]$ egy lokális gyűrű a hányadostest konstrukciójához analóg módon definiált műveletekre nézve.