Algebra3 matematikus szakirány

7. gyakorlat

2016. október 27.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha R egy (nem feltétlen kommutatív) bal-noether gyűrű, akkor $R[x]$ is az.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha R kommutatív gyűrű, és $R[x]$ noether, akkor R is az.

3. Mutassuk meg, hogy ha $R \neq 0$ nullosztómentes gyűrű balideáljaira érvényes a minimumfeltétel, akkor R ferdetest.

4. Igazoljuk, hogy minden végesen generált csoportnak van maximális részcsoportja, de a racionális számok additív csoportjának nincs.

5.* Igazoljuk, hogy ha R (kommutatív) noether gyűrű, akkor a formális hatványsorok $R[[x]]$ gyűrűje is noether.

---

6. Igazoljuk, hogy az R integritási tartomány $p \neq 0$ eleme pontosan akkor prím, ha $R/(p)$ nullosztómentes. Adjunk példát (alkalmas R-ben) olyan p prímre, amikor ez a gyűrű nem test.

7. Legyen R integritási tartomány és $b, c \in R$. Bizonyítsuk be, hogy $(b)(c) = (bc)$ és $(b) + (c) = (b, c)$. Igazoljuk azt is, hogy ha a b és c elemeknek van egy t kitüntetett közös többszöröse, akkor $(b) \cap (c) = (t)$.

8. Tegyük fel, hogy I, J, K ideálok egy R gyűrűben. Mutassuk meg, hogy $I(J, K) = (IJ, IK)$, és $(I, J)(I \cap J) \subseteq IJ + JI$. Ha R főideálgyűrű, akkor milyen számelméleti állításokat jelentenek ezek az összefüggések?

9. Adjunk példát olyan integritási tartományra, melyben a főideálokra teljesül a maximumfeltétel, de tetszőleges ideálokra nem.

10. Van-e $\mathbb{Z}[x]$-ben olyan ideál, ami nem generálható 1000 elemmel?

11. Legyen $d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes ($d \neq 0, 1$). Határozzuk meg a $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrű invertálható elemeinek (azaz *egységeinek*) a csoportját. (Ha $d > 0$, akkor $*$-os.)

12. A Gauß-egészek $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűjében mik a prímideálok?

13. Igazoljuk, hogy az a) Gauß-egészek $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűjében $b)^*$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ $c)^*$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ gyűrűben egyértelmű a prímfaktorizáció.