Algebra3 matematikus szakirány

6. gyakorlat

2016. október 20.

1. Az alábbi, definiáló relációkkal megadott csoportoknak határozzuk meg a rendjeit. Melyek izomorfak egy korábbról már ismert csoporttal?
   (a) $\langle a \mid a^2 = 1 \rangle$.
   (b) $\langle a \mid a^3 = 1 \rangle$.
   (c) $\langle a \mid a^5 = 1, a^7 = 1 \rangle$.
   (d) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba \rangle$.
   (e) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = 1, ab = ba \rangle$.
   (f) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^7 = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$.
   (g) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^7 = 1, aba^{-1} = b^2 \rangle$.
   (h) $\langle a, b \mid a^6 = 1, b^2 = a^3, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.
   (i) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^3 = 1 \rangle$.
   (j) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^n = 1 \rangle$ (ahol $n \geq 3$).
   (k) $\langle a, b \mid a^3 = 1, b^2 = 1, (ab)^3 = 1 \rangle$.
   (l) $\langle a, b \mid a^3 = 1, b^2 = 1, (ab)^4 = 1 \rangle$.
   (m) $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = 1, ab = ba, cac^{-1} = b \rangle$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha F szabad csoport, akkor bárhogy is veszünk egy $\alpha\colon G \twoheadrightarrow H$ szürjektív csoporthomomorfizmust, az F csoport minden H-ba menő φ homomorfizmusa "keresztülvezethető" az α leképezésen, azaz van olyan $\psi\colon F \to G$ homomorfizmus, hogy $\varphi = \alpha \circ \psi$.

---

3. Legyen R olyan, legalább 2 elemű gyűrű, amiben minden $a, b \in R$ ($a \neq 0$) esetén az $ax = b$ egyenlet megoldható. Mutassuk meg, hogy R ferdetest.

4. Igazoljuk az alábbiakat: Az $a \in R$ elem által *generált balideál* $(a)_b = \{na + ra \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$, egységelemes gyűrűben $(a)_b = \{ra \mid r \in R\} = Ra$ (mivel leginkább egységelemes gyűrűkkel foglalkozunk, ezért az utóbbi jelölést fogjuk használni. Az $a \in R$ elem által *generált ideál* $(a) = \{na + ra + as + \sum_i r_i a s_i \mid r, s, r_i, s_i \in R, n \in \mathbb{Z}\}$, egységelemes gyűrűben: $(a) = \{\sum_i r_i a s_i \mid r_i, s_i \in R\}$.

5. Az R gyűrű I és J ideáljai által generált ideál: $(I, J) = I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$. Az I és J komplexusszorzata által generált ideál $IJ := \{\sum_i a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J\}$.

---

6. Határozzuk meg $\mathbb{R}[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ ideáljait.

7. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2) \cong \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

8. Számítsuk ki a $\mathbb{Z}/(m) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gyűrűben az n elem annullátorát.

9. Mely $m > 0$ egészekre igaz, hogy a $\mathbb{Z}/(m)$ gyűrűben a nullosztók a nullával együtt ideált alkotnak?

10. Legyen $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Számítsuk ki az $M_2(\mathbb{R})$ gyűrűben az M jobb és bal annullátorát.

11. Legyen R egységelemes gyűrű. Mutassuk meg, hogy az $M_n(R)$ teljes mátrixgyűrű ideáljai pontosan az $M_n(I)$ alakú részhalmazok, ahol I ideálja R-nek.

12. Határozzuk meg az $M_n(K)$ gyűrű összes balideálját, ha K test.

13. Igazoljuk, hogy egy K test fölötti $n \times n$-es felsőháromszg̈-mátrixok R gyűrűjében ideált alkotnak azok a mátrixok, amelyeknek a főátlójában végig nulla áll, és a szerinte vett faktor a K^n direkt hatvánnyal izomorf.

14. Mutassuk meg, hogy egységelemes gyűrűben minden valódi balideál része egy maximális balideálnak (amely tehát a valódi balideálok halmazában maximális).

15. Legyen I ideál az R gyűrűben. Mutassuk meg, hogy azon J ideálok között, melyekre $I \cap J = \{0\}$, van maximális.

---

16. Legyen R gyűrű. Igazoljuk, hogy az $(r, n)(s, m) := (rs + mr + ns, nm)$ szorzásra nézve az $R \times \mathbb{Z}$ Abel-csoport egységelemes gyűrűvé válik, melyben az $(r, 0)$ alakú elemek R-rel izomorf részgyűrűt alkotnak. *Ezért minden gyűrű beágyazható egységelemes gyűrűbe.*