# Algebra3 matematikus szakirány

4. feladatsor

2016. október 6.

1. Legyen $G$ egy csoport, $H \leq G$ és $X$ egy halmaz, amin $G$ tranzitívan hat, és $x \in X$ tetszőleges. Adjunk meg egy bijekciót az $X$-beli $H$-orbitok és a $(H, \mathrm{Stab}_G(x))$ pár kettős mellékosztályai között.

2.* Legyen $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ és $B$ az invertálható felsőháromszög-mátrixok részcsoportja. Igazoljuk, hogy pontosan $n!$ darab kettős mellékosztálya van $G$-nek a $(B, B)$ pár szerint és a permutáció mátrixok egy reprezentánsrendszert alkotnak.

---

3. Legyen $P$ egy $p$-Sylow $G$-ben, és $N \lhd G$. Igazoljuk, hogy $PN/N$ egy $p$-Sylowja $G/N$-nek, és $P \cap N$ egy $p$-Sylowja $N$-nek.

4. Melyik csoporttal izomorf az $S_4$ csoport 2-Sylow részcsoportja?

5. Tegyük föl, hogy a $G$ csoport rendjében a $p$ prím első hatványon szerepel. Mutassuk meg, hogy a $p$-Sylow részcsoportok száma a $p$-edrendű elemek számának a $p-1$-ed része.

6. Igazoljuk, hogy ha a $G$ csoportban minden $p$-Sylow részcsoport normálosztó minden $p$ prímre, akkor $G$ a Sylow részcsoportjainak direkt szorzata.

7. Igazoljuk, hogy nincs $200, 204, 260, 56, 616$ rendű egyszerű csoport.

8. Igazoljuk, hogy ha $p$, $q$, $r$ különböző prímek, akkor nincs $pqr$ rendű egyszerű csoport.

9. Igazoljuk, hogy ha $p$ és $q$ különböző prímek, akkor nincs $p^2q$ rendű egyszerű csoport.

10.* Igazoljuk, hogy ha $p \neq q$ prímek és $a > 0$ egész, akkor nincs $p^a q$ rendű egyszerű csoport.

11. (Frattini elv) Legyen $N \lhd G$ és $P$ egy $p$-Sylowja $N$-nek. Igazoljuk, hogy $G = NN_G(P)$, és hogy $N_G(P)$ tartalmazza $G$ egy $p$-Sylow részcsoportját.

12. Tegyük fel, hogy $K \leq G$ tartalmazza $G$ egy $p$-Sylowjának normalizátorát. Mutassuk meg, hogy $N_G(K) = K$ és $|G : K| \equiv 1 \pmod{p}$.

---

13. Legyenek $N$ és $H$ csoportok, és $\varphi \colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ egy tetszőleges homomorfizmus. Definiáljuk a $G$ csoportot úgy, hogy elemei az $(n, h)$ rendezett párok ($n \in N, h \in H$), a szorzás pedig $(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1(\varphi(h_1))(n_2), h_1h_2)$. $G$-t az $N$ és $H$ *szemidirekt szorzatának* nevezzük, és $N \rtimes_\varphi H$-val jelöljük (az indexben lévő $\varphi$-t néha elhagyva). Legyen $N^* := \{(n, 1) \mid n \in N\}$ és $H^* := \{(1, h) \mid h \in H\}$. Igazoljuk az alábbiakat:

   *a)* $G$ tényleg csoport a megadott szorzásra.

   *b)* Az $N^*$ az $N$-nel izomorf normálosztó $G$-ben.

   *c)* A $H^*$ a $H$-val izomorf részcsoport $G$-ben.

   *d)* $G = N^*H^*$ és $N^* \cap H^* = \{1\}$.

   *e)* A $H^*$ a konjugálással úgy hat $N^*$-on, ahogy a $\varphi$ leképezés előírja, azaz
   $$(1, h)(n, 1)(1, h)^{-1} = (\varphi(h)(n), 1)\ .$$

   *f)* A $H^*$ pontosan akkor normálosztó $G$-ben, ha $\varphi(h) = \mathrm{id}_N$ minden $h \in H$-ra.

14. Legyenek $p \neq q$ prímek. Igazoljuk, hogy bármely két nemkommutatív $pq$ rendű csoport izomorf.