Algebra3 matematikus szakirány

3. feladatsor

2016. szeptember 29.

1. Legyen $g \in G$ egy tetszőleges n rendű elem egy G csoportban, ahol $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. Írjuk fel g-t $g = g_1 \dots g_r$ alakban, ahol a g_i-k ($i = 1, \dots, r$) páronként felcserélhetők és g_i rendje $p_i^{\alpha_i}$.

2. Adjunk meg egy izomorfizmust Z_6 és $Z_2 \times Z_3$ között.

3. Hányféleképpen bontható fel a $Z_p \times Z_p$ csoport két valódi részcsoportjának direkt szorzatára?

4. Hány p^2 rendű elem van $Z_{p^2} \times Z_p$-ben? És hány p^2 rendű részcsoport?

5. Legyen A egy véges Abel-csoport, és p egy prímszám. Bizonyítsuk be, hogy A felbomlik két részcsoportjának a direkt szorzatára, melyek közül az egyik egy p-csoport, a másik rendje pedig nem osztható p-vel. Egyértelmű-e a felbontás?

6. Legyen $A \cong \prod_{i=1}^{r} Z_{p^{n_i}}^{k_i}$ egy p-hatvány rendű Abel csoport, ahol $n_1 < \dots < n_r$ és $n \geq 1$ egy tetszőleges egész szám. Az n_i-k és k_i-k segítségével adjunk formulát arra, hány p^n rendű elem van A-ban. Igazoljuk a véges Abel-csoportok alaptételében az egyértelműséget.

7. Legyenek $n > 1$ és $k \geq 1$ egész számok. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Aut}(\underbrace{Z_n \times \dots \times Z_n}_{k}) \cong \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha G_1 és G_2 csoportok, akkor $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$.

9.* Legyen G_1 és G_2 két csoport. Bizonyítsuk be, hogy $G := G_1 \times G_2$ minden H részcsoportjához van olyan $N_1 \lhd H_1 \leq G_1$, $N_2 \lhd H_2 \leq G_2$ és egy $\iota \colon H_1/N_1 \to H_2/N_2$ izomorfizmus, melyre
$$H = \{(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2 \leq G_1 \times G_2 \mid \iota(h_1N_1) = h_2N_2\}.$$

10. Határozzuk meg az alábbi csoportok összes elemének centralizátorát és konjugáltosztályát: D_n, Q, S_4, S_5, A_4, A_5, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.

11. Bizonyítsuk be, hogy az $(12 \cdots n) \in S_n$ elem centralizátora pontosan az általa generált részcsoport.

12. Legyen G egy csoport, és $H \leq G$ egy részcsoport. Bizonyítsuk be, hogy az $N_G(H) \to \mathrm{Aut}(H)$ természetes homomorfizmus magja $C_G(H)$. (Mi ez a természetes homomorfizmus?)

13. Hány elemű az $\langle (12 \cdots n) \rangle \leq S_n$ részcsoport normalizátora S_n-ben?

14. Legyen $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, és $T \leq G$ a diagonális invertálható mátrixok csoportja. Bizonyítsuk be, hogy $C_G(T) = T$. Melyik ismert csoporttal izomorf $N_G(T)/T$? Próbáljuk meg általánosítani a feladatot $\mathbb{C}$ helyett más testre.

15.* Legyen $U \leq G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ azon felsőháromszög-mátrixok csoportja, melyekben a főátló elemei 1-esek. Mi $N_G(U)$?