Algebra3 matematikus szakirány

10. gyakorlat

2016. december 1.

1. Igazoljuk az 5-lemma másik állítását, azaz ha f_2, f_4 epi és f_5 mono, akkor f_3 epi.

2. Legyen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ R-modulusoknak egy egzakt sorozata, M pedig egy tetszőleges R-modulus. Bizonyítsuk be, hogy a

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, M)$$

sorozat is egzakt, ahol $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(C, M)$ esetén $g^*(\gamma) = \gamma \circ g$ és $\beta \in \mathrm{Hom}_R(B, M)$ esetén $f^*(\beta) = \beta \circ f$.

3. Kígyó lemma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

A fenti kommutatív diagramban a sorok egzaktak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a

$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma) \to 0$$

sorozat is egzakt, ahol $\varphi\colon X \to Y$ (modulus)homomorfizmusra $\mathrm{Coker}(\varphi) := Y/\mathrm{Im}(\varphi)$ a φ *komag*ja. A fenti sorozatban minden leképezést az (**??**) diagram soraiban levő leképezések indukálnak, kivéve δ-t, melynek megkonstruálása a feladat része.

4. Adjunk példát olyan A, B R-modulusokra, amikre

   a) $\mathrm{Hom}_R(A, B) \neq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$;

   b) $\mathrm{Hom}_R(A, B) \neq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$, de $\mathrm{Hom}_R(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$;

   c) $\mathrm{Hom}_R(A, B) \ncong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$.

5. Legyen $0 \to Z_2 \to Z_4 \to Z_2 \to 0$ $\mathbb{Z}$-modulusoknak rövid egzakt sorozata. Széteső-e ez a sorozat?

6. Van-e olyan $0 \to Z_2 \to Z_2 \oplus Z_2 \to Z_2 \to 0$ rövid egzakt sorozat, ami nem széteső?

7. Legyen R integritási tartomány, M egy R-modulus, $m \in M$. Azt mondjuk, hogy m *torzióelem*, ha $\mathrm{Ann}_R(m) \neq \{0\}$. Jelölje T a torzióelemek halmazát. M-et *torziómentes* modulusnak nevezzük, ha $T = \{0\}$, *torziómodulus*nak, ha $T = M$. Igazoljuk, hogy T részmodulusa M-nek, és hogy M/T torziómentes.

8. Bizonyítsuk be, hogy integritási tartomány felett minden projektív modulus torziómentes.

9. Legyen $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (a mod 6 maradékosztályok gyűrűje).

   (a) Van-e olyan R-modulus, ami projektív, de nem szabad?

(b)* Van-e olyan R-modulus, ami nem projektív?

10. Igazoljuk, hogy ha A torziómentes Abel-csoport, D pedig osztható Abel-csoport, akkor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ osztható Abel-csoport.

11. Bizonyítsuk be, hogy az M R-modulus akkor és csak akkor injektív, ha minden $L \lhd_b R$ balideálhoz és minden $f\colon K \to M$ (modulus) homomorfizmushoz van olyan $g\colon R \to M$ (modulus) homomorfizmus, melyre $g_{|L} = f$.

12. Igazoljuk, hogy ha P projektív R-modulus, akkor van olyan F *szabad* R-modulus, hogy $P \oplus F$ is szabad. Van-e mindig végesen generált F is?

13.* Igazoljuk, hogy (kommutatív) lokális gyűrű fölött minden végesen generált projektív modulus szabad. (Az állítás igaz nem feltétlenül végesen generált projektív modulusokra is.)

14.* Legyen R egy egységelemes gyűrű. Képezzük azt az F szabad Abel-csoportot, melynek generátorai a végesen generált projektív R-modulusoknak az izomorfiaosztályai. Ha P egy végesen generált projektív R-modulus, akkor jelöljük $[P]$-vel P izomorfiaoszályát, tehát

$$F = \bigoplus_{[P], P \text{ vég. gen. proj. } R\text{-mod}} \mathbb{Z}[P] \ .$$

Faktorizáljuk F-et az összes $[P_1 \oplus P_2] - [P_1] - [P_2]$ típusú relációval minden P_1 és P_2 projektív R-modulusra. A faktorcsoportot $K_0(R)$-rel jelölik, neve: az R gyűrű Grothendieck-csoportja. (Megjegyzés: a végesen generált projektív R-modulusok (izomorfia osztályai) kommutatív egységelemes félcsoportot alkotnak a direktösszegre, mint műveletre nézve. $K_0(R)$ nem más, mint ennek a félcsoportnak a csoport lezártja.

a) Mivel izomorf $K_0(K)$, ha K test?

b) Mivel izomorf $K_0(R)$, ha R lokális gyűrű?

c) Mivel izomorf $K_0(\mathbb{Z})$?

d) Igazoljuk, hogy ha R kommutatív (és egységelemes), akkor a

$$\begin{array}{rcl} \iota\colon \mathbb{Z} & \to & K_0(R) \\ 1 & \mapsto & [R] \end{array}$$

leképezés injektív. Adjunk példát olyan R gyűrűre, melyre ${}_RR \cong {}_RR \oplus {}_RR$, így $\iota = 0$.